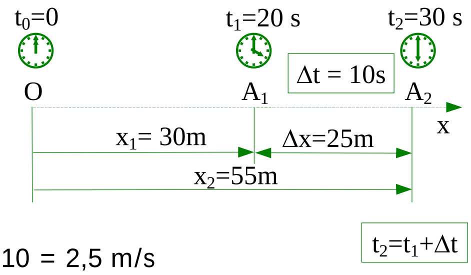
La cinématique analytique a pour but de définir à l'aide d'équations analytiques la position, la vitesse et l'accélération d'un solide à tout instant . On se limitera à l'étude des mouvements de translation rectiligne et de rotation autour d'un axe fixe.

1- MOUVEMENT DE TRANSLATION RECTILIGNE:



1.1- Position, vitesse et accélération :

La position d'un point A (ou d'un solide) étant définie par son abscisse x en mètre mesuré à partir de l'origine du mouvement O, on défini :

a- vitesse moyenne :

$$\boxed{v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$ en m/s

entre A_1 et A_2 : $v_{moy} = x_2 - x_1 / t_2 - t_1 = 25/10 = 2{,}5$ m/s

entre O et A_2 : $v_{moy} = x_2 - x_0 / t_2 - t_0 = 55/30 = 1{,}8$ m/s

la vitesse moyenne ne décrit pas les fluctuations de mouvement !

b- vitesse instantanée :

Lorsque Δt tend vers 0, la vitesse moyenne devient la vitesse instantanée. Celle-ci s'obtient donc par passage à la limite de la fonction v. La vitesse v(t) est la dérivée de la position x(t) par rapport au temps :

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta x / \Delta t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = dx_{(t)} / dt}$$ en m/s

c- accélération :

De même, on montre que l'accélération a(t) est la dérivée de la vitesse v(t) par rapport au temps.

$$\boxed{a(t) = dv_{(t)} / dt}$$ en m/s²

1.2- Equations du mouvement :

La position x, la vitesse v et l'accélération a d'un solide en fonction du temps t sont définies par les équations du mouvements notées : x(t), v(t) et a(t). En fonction des variations, le mouvement sera décomposé en plusieurs phases. Chaque équation n'est valable que pour une phase donnée.

1.3- Mouvement Rectiligne Uniforme : (M.R.U.) Phase à vitesse constante

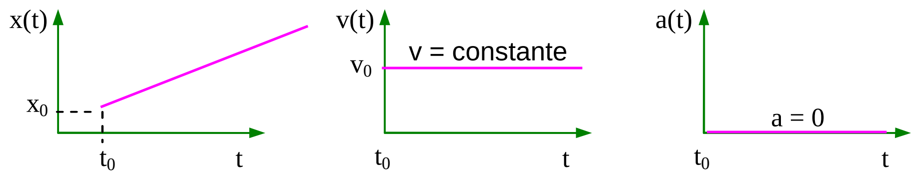
Equations du mouvement :

$a(t) = a = 0$
$v(t) = v$ = constante
$x(t) = v \cdot (t - t_0) + x_0$

Conditions initiales :

v_0 : vitesse initiale, t_0 temps initial de la phase
x_0 : position initiale (à l'instant t_0)
x(t) : position à un instant t

Représentation graphique :



1.4- Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (M.R.U.V.) Phase à accélération cste

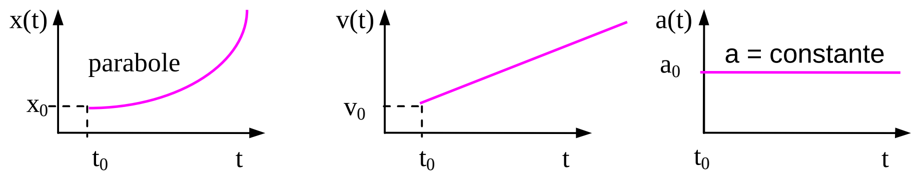
Equations du mouvement :

$a(t) = a$ = constante
$v(t) = a \cdot (t - t_0) + v_0$
$x(t) = 1/2 \cdot a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + x_0$

Conditions initiales :

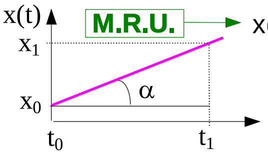
v_0 : vitesse initiale, , t_0 temps initial de la phase
x_0 : position initiale (à l'instant t_0),
x(t) : position, v(t) vitesse à un instant t

Représentation graphique :



Remarques :
- ✓ si a > 0, il y a accélération , si a < 0, il y a décélération
- ✓ équation indépendante du temps très utile → $\boxed{v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a\,(x - x_0)}$

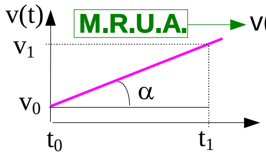
✓ calcul rapide de v et de a :



$x(t) = v\,.\,(t - t_0) + x_0$

└► v = tan α : coefficient directeur

v = tan ~ = $\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$



$v(t) = a\,.(t - t_0) + v_0$

└► a = tan α : coefficient directeur

a = tan ~ = $\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$

2- MOUVEMENT DE ROTATION :

La démarche est identique à celle de translation rectiligne

2.1- Position angulaire ¯ :

La position angulaire d'un point A (ou d'un solide) est définie par son angle de rotation θ en radian.

2.2- vitesse angulaire µ :

La vitesse µ(t) est la dérivée de la position ¯(t) par rapport au temps :

µ(t) = d¯(t) / dt = ¯'(t) (en rad/s) Si N est en tr/min, alors : **µ = ®.N / 30**

2.3- accélération angulaire µ' :

L'accélération µ**'(t)** est la dérivée de la vitesse µ(t) par rapport au temps.

µ'(t) = dµ(t) / dt = µ'(t) = ¯''(t) (en rad/s²)

2.4- Mouvement Circulaire Uniforme : (M.C.U.) vitesse de rotation constante

Equations du mouvement :	µ'(t) = µ' = 0 µ(t) = µ = constante ¯(t) = µ . (t – t₀) + ¯₀	Conditions initiales :	ω_0 : vitesse à t_0 temps initial de la phase θ_0 : position à t_0 θ(t) : position angulaire à un instant t

Représentations graphiques : voir "translation" (v ì µ, x ì ¯)

2.5- Mouvement Circulaire Uniformément Varié (M.C.U.V.) accélération angulaire constante

Equations du mouvement :	µ'(t) = µ' = constante µ(t) = µ'.(t – t₀) + µ₀ ¯(t) = 1/2.µ'.(t – t₀)² + µ₀.(t – t₀) + ¯₀	Conditions initiales :	ω_0 : vitesse initiale à l'instant t_0 θ_0 : position initiale à t_0 θ(t) : position angulaire à un instant t

Représentations graphiques : voir "translation"(a ì µ', v ì µ, x ì ¯)

Remarques : ✓ si α > 0, il y a accélération, si α< 0, il y a décélération
✓ équation indépendante du temps très utile
✓ calcul rapide de ω et de ω' : voir "Translation rectiligne"

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2.\,\omega'\,.(\theta - \theta_0)$

2.6- RELATION ENTRE ROTATION ET TRANSLATION

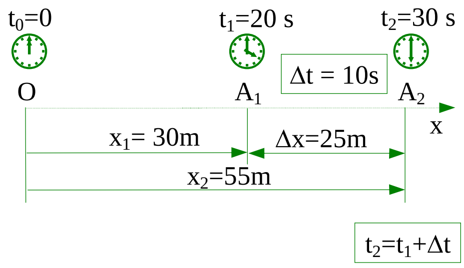
Lorsqu'il y a transformation de mouvement ROTATION ⇔ TRANSLATION, le passage des paramètres d'un mouvement à l'autre s'obtient par les relations suivantes :

V(t) = µ(t) . R

La cinématique analytique a pour but de définir à l'aide d'équations analytiques la position, la vitesse et l'accélération d'un solide à tout instant . On se limitera à l'étude des mouvements de translation rectiligne et de rotation autour d'un axe fixe.

1- TRANSLATION RECTILIGNE:

1.1- Position x, vitesse V et accélération a :



La position d'un point A (ou d'un solide) étant définie par son abscisse x en mètre mesuré à partir de l'origine du mouvement O, on défini :

a- vitesse moyenne :

entre A_1 et A_2 : $V_{moy} = x_2 - x_1 / t_2 - t_1$ =

en m/s

entre O et A_2 : $V_{moy} = x_2 - x_0 / t_2 - t_0$ =

la vitesse moyenne ne décrit pas les fluctuations du mouvement !

b- vitesse instantanée :

Lorsque Δt tend vers 0, la vitesse moyenne devient la vitesse instantanée. Celle-ci s'obtient donc par passage à la limite de la fonction v. La vitesse v(t) est la dérivée de la position x(t) par rapport au temps :

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta x/\Delta t) \Rightarrow$$

en m/s

c- accélération :

De même, on montre que l'accélération a(t) est la dérivée de la vitesse v(t) par rapport au temps.

en m/s^2

1.2- Equations du mouvement :

La position x , la vitesse v et l'accélération a d'un solide en fonction du temps t sont définies par les équations du mouvements notées : x(t), v(t) et a(t). En fonction des fluctuations du mouvement, ce dernier sera décomposé en plusieurs phases. Chaque équation n'est valable que pour une phase donnée.

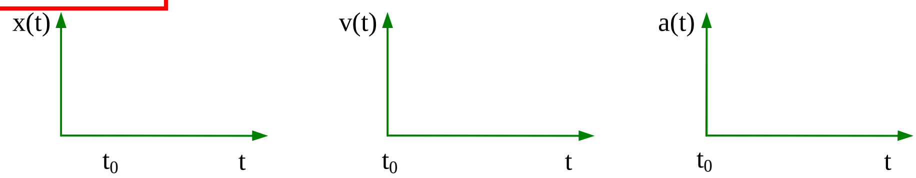
1.3- Mouvement Rectiligne Uniforme : (M.R.U.) vitesse constante

Equations du mouvement :

Conditions initiales :

v_0 : vitesse initiale t_0 temps initial de la phase
x_0 : position initiale (à l'instant t_0)
x(t) : position à un instant t

Représentation graphique :



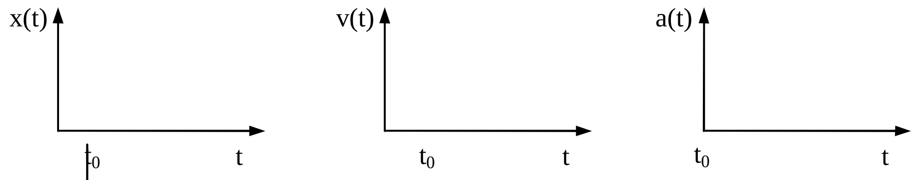
1.4- Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (M.R.U.V.) phase à accélération cste

Equations du mouvement :

Conditions initiales :

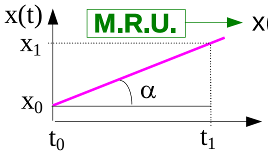
v_0 : vitesse initiale, t_0 temps initial de la phase
x_0 : position initiale (à l'instant t_0)
x(t) : position à un instant t

Représentation graphique :



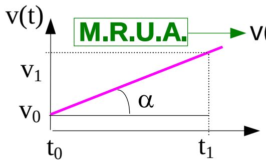
Remarques :
- ✓ si a > 0, il y a accélération , si a < 0, il y a décélération
- ✓ équation indépendante du temps très utile

✓ calcul rapide de v et de a :



$x(t) = v_0 .(t-t_0) + x_0$

$v_0 = \tan \alpha$: coefficient directeur



$v(t) = a_0 .(t-t_0) + v_0$

$a_0 = \tan \alpha$: coefficient directeur

2- ROTATION :

La démarche est identique à celle de la translation rectiligne

2.1- Position angulaire ¯ :

La position angulaire d'un point A (ou d'un solide) est définie par son angle de rotation θ en radian

2.2- vitesse angulaire µ :

La vitesse µ(t) est la dérivée de la position ¯(t) par rapport au temps :

(en rad/s) Si N est en tr/min, alors :

2.3- accélération angulaire µ' :

L'accélération µ'(t) est la dérivée de la vitesse µ(t) par rapport au temps.

(en rad/s^2)

2.4- Mouvement Circulaire Uniforme : (M.C.U.) vitesse de rotation constante

Equations du mouvement :

Conditions initiales :

ω_0 : vitesse à t_0 temps initial de la phase
θ_0 : position initiale à t_0
$\theta(t)$: position à un instant t

Représentations graphiques : voir "translation" (v ì µ ; x ì ¯)

2.5- Mouvement Circulaire Uniformément Varié (M.C.U.V.) accélération angulaire constante

Equations du mouvement :

Conditions initiales :

ω_0 : vitesse initiale à l'instant t_0
θ_0 : position initiale à t_0
$\theta(t)$: position à un instant t

Représentations graphiques : voir "translation"(a ì ~, v ì µ, x ì ¯)

Remarques : ✓ si $\alpha > 0$, il y a accélération , si $\alpha < 0$, il y a décélération
✓ équation indépendante du temps très utile
✓ calcul rapide de ω et de α : voir "Translation rectiligne"

2.6- RELATION ENTRE ROTATION ET TRANSLATION

Lorsqu'il y a transformation de mouvement ROTATION ⇔ TRANSLATION, le passage des paramètres d'un mouvement à l'autre s'obtient par les relations suivantes :