MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Deuxième partie

Académie de Toulouse

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3. Les annexes sont à rendre avec la copie au moment de quitter définitivement la salle de composition. (pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Exercice 1
(à traiter par tous les candidats)

Le tournoi de l'Olympe

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

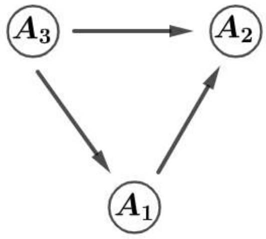
On appelle tournoi l'ensemble des rencontres entre n joueurs respectant les règles suivantes :

- Chaque joueur rencontre successivement tous les autres joueurs.
- Dans chaque rencontre, il y a un gagnant et un perdant (pas de match nul).

Une fois les rencontres réalisées, leurs résultats sont appelés « bilan de tournoi ».

Par exemple, avec 3 joueurs A_1, A_2 et A_3, un bilan de tournoi possible est :

A_1 gagne contre A_2, A_3 gagne contre A_1 et A_2, que l'on peut représenter comme ci-contre.



Première partie : Grand gagnant / Tournoi indécis

- On dit qu'un joueur est « grand gagnant », s'il a gagné tous ses matchs.
- Si aucun joueur n'est « grand gagnant », on dit que ce bilan de tournoi est indécis.

1. Dans cette question, on considère $n=3$.

a. Expliquer pourquoi le bilan de tournoi donné en exemple n'est pas indécis.

b. Justifier qu'il y a 8 bilans possibles pour le tournoi, et déterminer ceux qui sont indécis.

2. Dans cette question, on considère n un entier tel que $n \geqslant 3$.

Justifier qu'il existe $\dfrac{n(n-1)}{2}$ matchs à organiser et déterminer le nombre de bilans possibles pour le tournoi.

3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Pour tout $n \geqslant 3$, le tournoi peut avoir un bilan avec un « grand gagnant ».

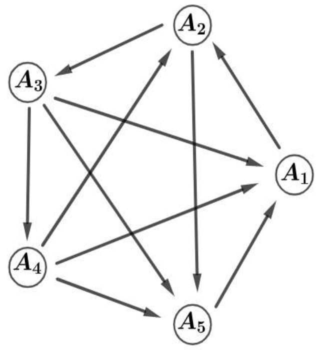
b. Pour tout $n \geqslant 3$, le tournoi peut avoir un bilan indécis.

Deuxième partie : Petit gagnant

Un joueur A est dit « petit gagnant » si pour chaque autre joueur B :

- Soit A gagne contre B,
- Soit il existe un joueur C tel que A gagne contre C et C gagne contre B.

On remarquera qu'un « grand gagnant » est aussi un « petit gagnant ».



4. On considère le bilan de tournoi représenté ci-contre :

a. Justifier que A_2 est un « petit gagnant ».

b. Trouver les autres « petits gagnants »

5. **a.** Pour $n=5$, l'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Si A est un «petit gagnant », alors A a le plus grand nombre de victoires.

b. Montrer que c'est encore le cas pour tout entier $n \geqslant 6$.

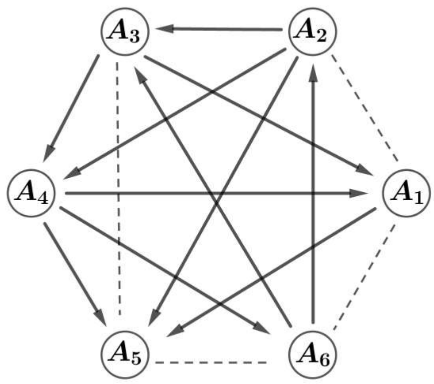
6. On considère un tournoi à n joueurs avec $n \geqslant 3$.

Soit A un joueur ayant le plus grand nombre de victoires. Expliquer par un raisonnement par l'absurde que A est forcément un « petit gagnant ».

Ainsi, tout bilan de tournoi possède au moins un « petit gagnant ».

7. **a.** Dans le cas $n=3$, existe-t-il des bilans de tournoi dans lesquels tous les joueurs sont « petits gagnants » ?

On admet que ce n'est pas le cas pour $n=4$. On le démontrera à la dernière question.



b. Pour $n=5$, représenter un bilan de tournoi où tous les joueurs sont des « petits gagnants ».

c. Pour $n=6$, recopier et compléter la représentation ci-contre en vous aidant des pointillés afin que tous les joueurs soient des « petits gagnants ».

d. On considère un bilan de tournoi de n joueurs avec $n \geqslant 5$ pour lequel tous les joueurs sont des « petits gagnants ».

Montrer que l'on peut construire un bilan de tournoi à $n+2$ joueurs qui vérifie la même propriété.

8. Pour quelles valeurs de n peut-on avoir un bilan de tournoi où tous les joueurs sont des « petits gagnants » ?

9. Montrer que pour $n=4$, il n'y a pas de bilan de tournoi où tous les joueurs sont des « petits gagnants ».

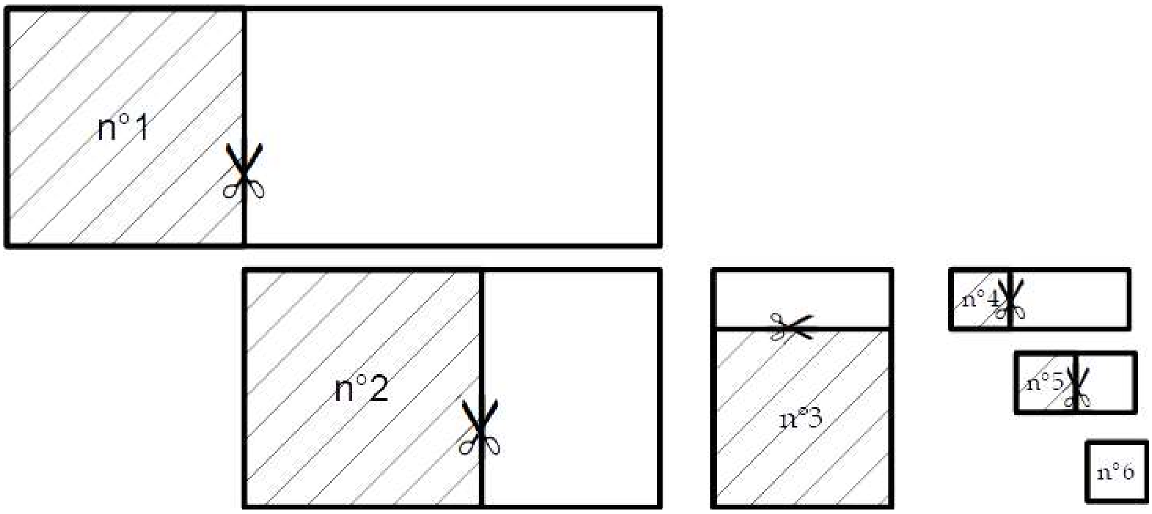
Exercice 2

(A traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Dernier carré

On dispose d'une feuille de papier rectangulaire. On y découpe dans le coin inférieur gauche le plus grand carré possible. Dans le morceau restant, on découpe à nouveau le plus grand carré possible, toujours dans le coin inférieur gauche.
Dans chaque rectangle restant obtenu, on continue à découper ainsi le plus grand carré possible tant que le procédé peut s'appliquer.

Par exemple, en partant d'un rectangle de longueur 11 et de largeur 4, on a effectué les découpes successives illustrées ci-dessous :

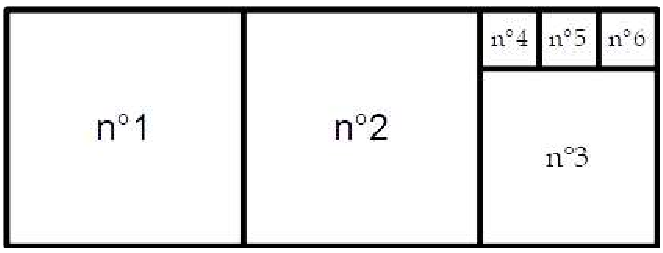


On a découpé dans l'ordre :

2 carrés de côté 4 puis **1** carré de côté 3 puis **3** carrés de côté 1

On associe alors à ce rectangle la suite finie : **2 – 1 – 3**

Ce découpage est résumé dans la figure ci-dessous:



Partie A

1. **Suites associées à un rectangle.**
   - **a.** Illustrer (comme dans la dernière figure) le découpage dans le cas d'un rectangle de longueur 15 et de largeur 8, et donner la suite associée.
   - **b.** Quelle suite est associée à un rectangle de longueur 158 et de largeur 49 ?
2. **Rectangles associés à une suite.**
   - **a.** Comment choisir le rectangle initial afin d'obtenir la suite 3 – 1 – 2 ?
   - **b.** Comment choisir le rectangle initial afin d'obtenir la suite 2 – 1 – 3 – 1 – 2 ?

3. **Suite impossible**

   Pourquoi est-il impossible d'obtenir la suite 4 – 3 – 2 – 1 ?

4. **Cas où longueur et largeur sont des nombres entiers**

   Démontrer que si la longueur et la largeur d'un rectangle sont des nombres entiers, alors la suite associée à ce rectangle est finie.

Partie B

On appelle format f d'un rectangle le rapport $f=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{l}}$ où L désigne la longueur et l désigne la largeur du rectangle. La longueur désigne toujours le plus grand côté du rectangle.

5. **Formats particuliers associés à des suites finies**

   a. La suite associée à un rectangle ne comporte qu'un terme, que peut-on dire du format de ce rectangle ?

   b. La suite associée à un rectangle ne comporte que deux termes, comment peut-on écrire le format de ce rectangle ?

6. **Format doré**

   On considère un rectangle dont le format vérifie : $1< f< 2$.

   a. On enlève le premier carré, on obtient un rectangle de format $f\,'$.

   Exprimer $f\,'$ en fonction de f .

   On appelle format doré, un format qui vérifie $f\,'=f$.

   b. Montrer que le format doré vérifie la relation $f(f-1)=1$.

   c. Calculer la valeur exacte du format doré.

   d. Quelle est la suite associée aux rectangles ayant le format doré ?

Partie C

7. **Formats associés à des suites infinies cycliques**

   a. En vous inspirant de la démarche de la partie B, déterminer le format des rectangles associés à la suite infinie cyclique alternant des 1 et des 2 : $1\,-\,2\,-\,1\,-\,2\,-\,1\,-\,2\,-\,\cdots$.

   b. En déduire le format des rectangles associés à la suite commençant par 5 puis alternant des 2 et des 1 : $5\,-\,2\,-\,1\,-\,2\,-\,1\,-\,2\,-\,\cdots$.

   c. On veut déterminer la suite associée à des rectangles de format $2\sqrt{2}$.

   i. A l'aide de la calculatrice, conjecturer cette suite.

   ii. Prouver cette conjecture.

Exercice 3

(A traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)
Pour cet exercice la feuille Annexes est à rendre avec la copie

Nombres fléchés

Partie A
Règles d'une grille de nombres fléchés

	24 ↓	11 ↓	8 ↓	11 ↓	20 ↓
17 →					
32 →					
17 →			8 →		

Il s'agit de compléter une grille comme celle ci-contre, en décomposant les nombres indiqués dans les cases grisées en somme de nombres, et ceci en respectant les trois règles suivantes :

R1 : Une décomposition utilise uniquement les nombres de 1 à 9.
R2 : Un nombre ne peut pas intervenir plus d'une fois dans une décomposition.

- Si 14 doit être décomposé en somme de deux nombres, alors c'est 5+9 (ou 9+5) et 6+8 (ou 8+6) mais pas 7+7.
- Si 14 doit être décomposé en somme de trois nombres c'est par exemple 4+1+9, mais pas 5+5+4

R3 : Une décomposition n'intervient pas plus d'une fois dans une grille.

- Si 15 a été écrit 7+8 dans la grille, il ne reste plus que 6+9 (ou 9+6) pour le reste de la grille.

1. **Exemples de remplissages non valides**
   a. On considère la grille n°1 ci dessous.
   Expliquer pourquoi le remplissage proposé à droite ne respecte pas la règle R3.

	14 ↓	16 ↓		13 ↓	20 ↓
6 →			6 →		
10 →			11 → 3 ↓		
19 →					
14 →					

Grille n°1

	14 ↓	16 ↓		13 ↓	20 ↓
6 →	4	2	6 →	1	5
10 →	3	7	11 → 3 ↓	2	9
19 →	2	3	1	7	6
14 →	5	4	2	3	

   b. On considère la grille n°2 page suivante.
   Expliquer en quoi le remplissage proposé à droite n'est pas valide.
   Pourquoi cette grille ne peut-elle pas avoir de remplissage valide ?

	29 ↓	13 ↓		14 ↓	21 ↓
6 →			6 →		
9 →			14 → 6 ↓		
34 →					
14 →					

Grille n°2

	29 ↓	13 ↓		14 ↓	21 ↓
6 →	5	1	6 →	2	4
9 →	7	2	14 → 6 ↓	5	9
34 →	9	7	4	6	8
14 →	8	3	2	1	

   c. Un concepteur veut modifier la grille n°2. Pourquoi ne peut-il pas remplacer l'un des nombres inscrit dans une case grisée par 38 ?

2. Premier exemple guidé de remplissage valide d'une grille.

	28↓	18↓		11↓	22↓
6→			6→		
8→			10→ 10↓		
31→					
28→					

	28↓	18↓		11↓	22↓
6→	f	g	6→	b	a
8→	h	i	10→ 10↓	d	c
31→	j			m	e
28→	k			p	

Grille n°3

a. Écrire les deux décompositions de 22 en somme de trois nombres.
En déduire les cases a et b, puis les cases c, d et e.

b. Écrire les décompositions de 28 en somme de quatre nombres.
En déduire les cases f et g, puis les cases h et i, puis les cases j et k.

c. Écrire la décomposition de 11 en somme de quatre nombres.
En déduire les cases p et m.

d. Terminer cette grille et compléter sur la feuille Annexes.

3. Deuxième exemple de remplissage d'une grille.

En vous inspirant des raisonnements utilisés à la question 2. , compléter sur la feuille annexe la grille n°4 proposée ci-contre. Aucune justification n'est attendue.

	27↓	19↓		14↓	21↓
5→			16→		
8→			5→ 8↓		
29→					
26→					

Grille n°4

Partie B

Dans cette partie, le concepteur s'intéresse au nombre de façons de décomposer un nombre entier positif donné n en somme de deux ou trois nombres distincts strictement positifs. Ils peuvent maintenant être supérieurs à 9.

4. Exemple : Trouver toutes les façons de décomposer 15 en somme de trois nombres distincts strictement positifs.
$15=12+2+1$, $15=6+5+4$, ...

5. Montrer que pour tout entier strictement positif n , le nombre de façons de le décomposer en somme de deux nombres distincts strictement positifs est égal à $\frac{n}{2}-1$ ou à $\frac{n-1}{2}$.

Annexes

Nom :
Prénom :

Pour les candidats ne suivant pas l’enseignement de spécialité de la voie générale

	28 ↓	18 ↓		11 ↓	22 ↓
6 →			6 →		
8 →			10 → 10 ↓		
31 →					
28 →					

Grille n°3 à compléter

	27 ↓	19 ↓		14 ↓	21 ↓
5 →			16 →		
8 →			5 → 8 ↓		
29 →					
26 →					

Grille n°4 à compléter