

---

## Activités autour des problèmes du type $f(x) = 0$

### Autour d'une équation ...

---

Pour l'ensemble des activités, on suppose avoir traité les points suivants du programme :

- Continuité
- TVI
- Limite de fonction
- Suites

---

#### Activité en amont :

Démontrer que l'équation  $\sqrt{x} = x - 1$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

---

#### Activité Principale : Autour d'une équation ...

##### Objectifs :

- Dégager à l'aide du logiciel de calcul formel la dérivée de la fonction  $\cos$
- Etude de signe d'une expression trigonométrique
- Limites du calcul formel

On considère l'équation  $(E)$  suivante :

$$(E) : \cos x = x - 2$$

1. A l'aide d'un logiciel, conjecturer le **nombre de solutions** de cette équation sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
2. Démontrer la conjecture précédente.
3. On se propose d'encadrer la (les) solution(s) de cette équation à l'aide de **l'algorithme de Dichotomie**.

Pour une fonction  $f$  strictement monotone et continue sur  $[a; b]$ , avec  $f(a)$  et  $f(b)$  de signes contraires, on rappelle la structure de l'algorithme :

```

Variables
    m, valeur milieu de l'intervalle « courant »
Initialisation
    a et b, les bornes de l'intervalle [a ; b]
    f, la fonction (rappel : f change de signe entre a et b)
Traitement
    Pour i variant de 1 à 50
        m prend la valeur (a+b)/2
        Si  $f(m)$  et  $f(a)$  sont de même signe alors
            a prend la valeur m
        sinon
            b prend la valeur m
Sortie
    Affiche a et b
  
```

**Programmer** cet algorithme sous ALGOBOX et déterminer un encadrement le plus précis possible de la (ou des) solution(s) de l'équation (E).

4. Que donne la résolution de l'équation (E) à l'aide d'un logiciel de calcul formel ?

**Activité en aval :**

Déterminer selon la valeur du réel  $m$  le nombre de solutions  $\sin x = x + m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

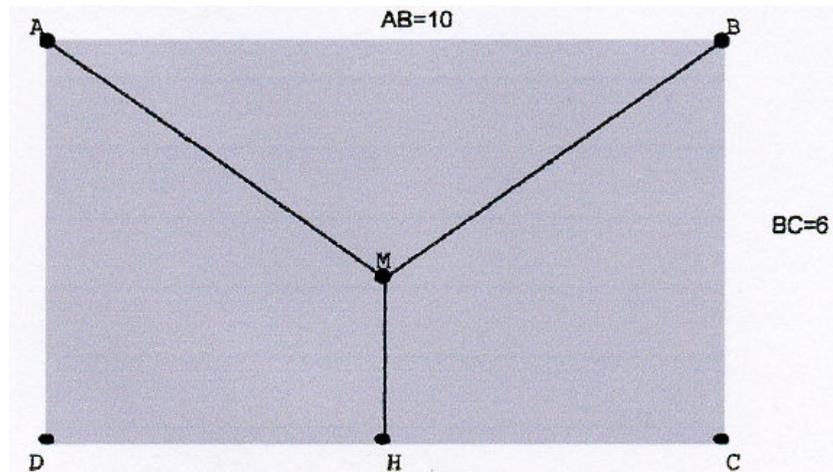
Objectifs :

- Vérifier à l'aide du logiciel de calcul formel la dérivée de la fonction proposée.
- Etude de signe d'une expression trigonométrique / Factorisation.

**Autre activité possible :**

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre.



Sur ce plan :

- $[AM]$  et  $[BM]$  représentent les deux premiers tuyaux.
- $[MH]$  représente le troisième tuyau.
- $(MH)$  est la médiatrice de  $[DC]$ .

On souhaite trouver la position du point  $M$  sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

On note  $Q$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(BC)$  et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu  $\widehat{BMQ} = \theta$ .

- (a) Utiliser un logiciel de géométrie pour simuler la situation décrite précédemment.  
(b) En déduire une valeur approchée au centième de la valeur de  $\theta$  qui rend minimale la longueur des tuyaux. Déterminer, grâce au logiciel, une valeur approchée au centième de la longueur minimale totale des tuyaux.
- On définit la fonction  $g : \theta \mapsto g(\theta) = 2MA + MH$  sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

**Déterminer la valeur exacte de  $\theta$  qui minimise la longueur des tuyaux.**