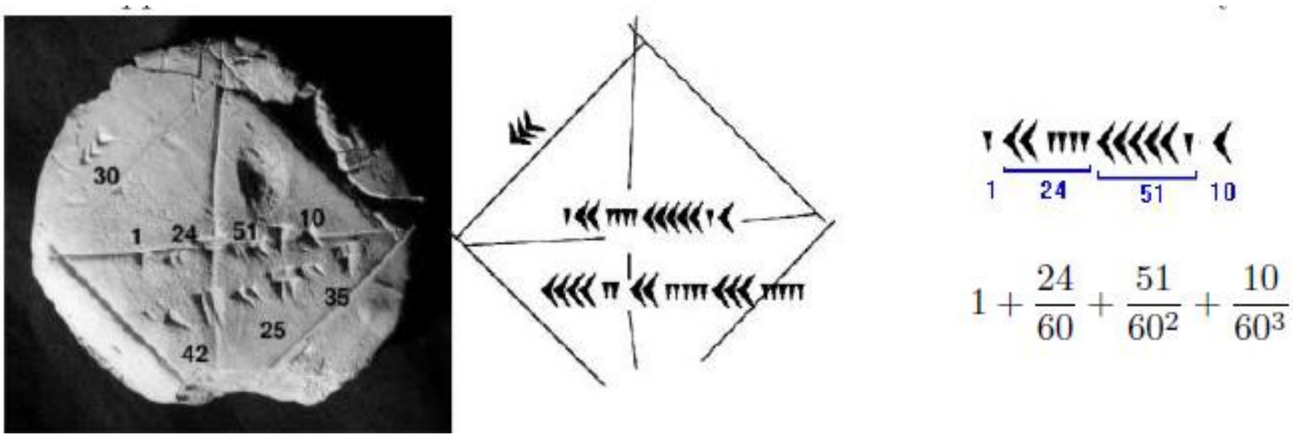
Compléments à l'atelier « Démonstrations » :

Racine carrée de 2 et ses secrets Une histoire mouvementée

Depuis l'antiquité, le nombre racine carrée de 2 $(\sqrt{2})$ est étroitement lié à la diagonale du carré de côté 1.

La première trace que nous en avons est une tablette **babylonienne** actuellement détenue par l'université de Yale aux USA. Elle est datée **entre 1800 et 1600 avant notre ère**. Étant donné sa taille réduite (8 cm de diamètre) qui la rend facile à transporter, on peut penser qu'elle était un aide-mémoire d'apprentissage. On y voit un carré, son côté, ses diagonales et une approximation de $\sqrt{2}$. Les longueurs et une valeur approchée de $\sqrt{2}$ sont écrites en caractères cunéiformes dans un système de numération à base 60.



On obtient 1,414212963. Le problème auquel la tablette donne la réponse pouvait être le suivant : « Un carré de côté 30 étant donné, déterminer la longueur de ses diagonales. » L'apprenti a fait un dessin sur lequel il a reporté l'unique donnée du problème : en multipliant par sa valeur approchée de $\sqrt{2}$, il a obtenu $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$ soit 42,42638889 arrondi à 10^{-8}.

Plus tard **vers le VIe siècle avant notre ère**, le mathématicien indien **APASTAMBA** écrit dans les Sulvasutras : la mesure doit être augmentée de son tiers et ceci à nouveau de son quart moins la trente-quatrième partie ; c'est la diagonale du carré. Ainsi pour un carré de côté c, la diagonale mesure $c \times \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{3\times4\times34}\right) = c \times 1,414215686$

C'est avec les géomètres grecs que $\sqrt{2}$ devient le centre d'un problème épineux : s'agit-il d'un nombre au sens admis à l'époque ? En effet, cette "racine" est liée à la diagonale du carré qui existe bien au sens mathématique pour ces géomètres puisqu'on peut la construire à la règle et au compas comme segment. Cependant, si on considère la longueur du côté du carré comme unité, il leur était impossible d'exprimer la longueur de la diagonale à l'aide d'un entier ou d'une fraction de deux entiers. Dans ce cas, on dit que le côté du carré et sa diagonale sont incommensurables et que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

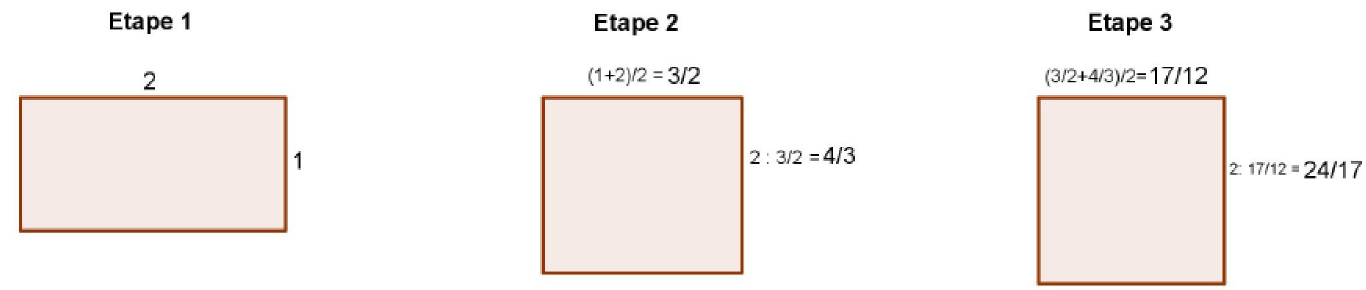
• Selon PYTHAGORE, tout est nombre. C'est pourtant dans son groupe que fut élaborée une démonstration du fait que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. La révélation de cette découverte provoqua un énorme scandale. Il fut tel que la légende rapporte qu' HIPPASE DE METAPONTE, disciple de PYTHAGORE, accusé d'avoir révélé cette découverte au monde (vers 530 avant notre ère), périt noyé, jeté à la mer par ses condisciples.

• ARISTOTE évoqua cette démonstration en signalant que si $\sqrt{2}$ était égal à une telle fraction « il y aurait un nombre pair égal à un nombre impair », ce qui est absurde !

• EUCLIDE inclut dans ses Éléments une démonstration arithmétique de ce résultat qui utilise un raisonnement par l'absurde, après une méthode d'anthyphérèse conduisant à des approches successives de $\sqrt{2}$. Il faut souligner que les mathématiciens mirent longtemps à considérer les nombres irrationnels comme de véritables nombres.

L'habitude de travailler avec eux ne s'installa que lentement aux XVIIe et XVIIIe siècles. Il semblerait que le symbole √ soit né en Allemagne, vers 1525, dans les écrits mathématiques de Christoff RUDOLF par déformation d'un "r" gothique. La réticence à travailler avec ces nombres ne fut vraiment réglée qu'avec les constructions mathématiques des nombres réels telles que celle de DEDEKIND publiée en 1872. Ces difficultés n'ont pas empêché que soit poursuivie la course à la meilleure approximation de $\sqrt{2}$ c'est à dire, pour nous, à la détermination du plus grand nombre possible de chiffres exacts dans le développement décimal illimité qui lui est associé. 2.

Des algorithmes de plus en plus performants. Si l'on n'a pas de traces écrites de l'algorithme utilisé par les babyloniens, on pense que le mathématicien grec, Héron D'ALEXANDRIE s'en est inspiré pour construire le sien. On imagine que la méthode des babyloniens consistait à construire une suite de rectangles d'aire 2 se rapprochant d'un carré d'aire 2 comme indiqué ci-dessous.



On part d'un rectangle de longueur 2 et de largeur 1 donc d'aire 2.

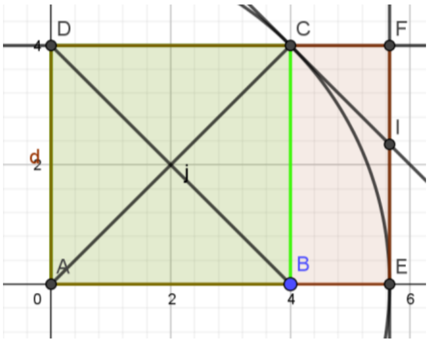
On construit un rectangle dont la longueur est la moyenne des dimensions du rectangle précédent. Ce qui donne $(1+2)/2 = 3/2$. Comme on veut que son aire soit encore égale à 2, on calcule sa largeur en faisant $2 \div 3/2$ ce qui fait $4/3$.

On refait le même travail en utilisant des dimensions du rectangle précédent pour construire un nouveau rectangle d'aire 2.

Les dimensions du rectangle à l'étape 4 sont $\frac{577}{408}$ et $\frac{816}{577}$. Les longueurs des côtés des rectangles se rapprochent de $\sqrt{2}$. A l'étape cinq, on obtient la précision obtenue par les babyloniens.

Au XVIIIe siècle, NEWTON élabora une méthode d'approximation des valeurs qui annulent les fonctions. Avec la fonction $f(x) = x^2 - 2$, qui s'annule pour $\sqrt{2}$, sa méthode mène à utiliser un algorithme sur la fonction g(x) = 1 2 (x + 2 x). On retrouve ainsi la méthode de Héron d'Alexandrie. Voici cet algorithme. En prenant A = 3 au départ, le faire fonctionner 6 fois et donner les valeurs de B obtenues avec le maximum de décimales exactes après la virgule. B=1,833333333 B=1,462 122 122 B=1,414 998 43 B=1,414 213 78 B=1,414 213 562 B=1,414 213 562 Actuellement, le Japonais Yasumasa √ KANADA détient le record du nombre de décimales exactes de 2 avec son collègue Daisuka Takahashi. En 1997, ils ont obtenu plus de 137 milliards de décimales exactes. Ce nombre, moins connu que π ou le nombre d'or, intervient dans de nombreuses situations de la vie courante : en électricité, en photographie, en architecture, en musique, etc. C'est ainsi que la feuille de format A4 que vous avez entre les mains dissimule √ 2 : en eet, le rapport de la longueur à la largeur est de √ 2. Cette propriété est conservée si on plie la feuille en deux pour obtenir un format A5.

<u>Une approche possible :</u>



On suppose $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers strictement positifs et p>q
On construit un carré ABCD de côté q, on a alors $AC = BD = p$
Par pliage on obtient un rectangle de côté p et q
$AE = DF = p$ mais donc =$CF = p - q$ entier. On montre que CFI semblable à DCB et on a une autre fraction égale $\frac{p}{q}$ avec d'autres entiers plus petits, cette fraction serait alors réductible ?

Des questions flash :

1) $\frac{8}{15} \times \frac{3}{24}$ est-il rationnel ?
2) Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont irrationnels ? $9 + \sqrt{45}$, $\frac{\sqrt{18}}{5\sqrt{2}}$, $5\sqrt{49}$
3) Soit a un nombre rationnel non nul. Son inverse $\frac{1}{a}$ est-il un nombre rationnel ou irrationnel ?

Des exercices de recherche :

1) Soient a et b deux nombres irrationnels, b non nul. Le quotient $\frac{a}{b}$ est-il un nombre rationnel ou irrationnel ?
2) Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
3) Montrer que le produit d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
4) Montrer qu'il existe toujours un nombre irrationnel entre deux nombres rationnels.
5) Montrer que la racine carrée d'un nombre premier est un nombre irrationnel.

Réflexions sur la démonstration de « 1/3 n'est pas un décimal » :

Caractérisation 1 :

Un **nombre décimal** est un nombre réel qui peut s'écrire exactement avec un nombre fini de chiffres après la virgule en écriture décimale positionnelle.

« Un nombre décimal est un nombre qui a un nombre fini de chiffres après la virgule ». Cette phrase comporte un si et seulement implicite. (Une définition caractérise l'objet qu'elle définit)

Conséquence : si un nombre a une infinité de chiffres après la virgule, alors il n'est pas décimal… C'est FAUX puisque$0,9999999\ldots = 1$. (soit n ce nombre 10n=9+n), par contre la condition est suffisante : « Si un nombre s'écrit avec un nombre fini de chiffres après la virgule, alors il est décimal »

Caractérisation 2 :

Les nombres décimaux sont les quotients d'entiers par des puissances de 10 et se présentent ainsi comme des rationnels particuliers.

Supposons 1/3 décimal alors il est de la forme a/10 ou a/100 … où a est un nombre entier, mais alors une puissance de 10 serait multiple de 3 ce qui est faux.