Quelques « démonstrations » en cycle 4

Nous vous proposons un pense-bête qui vous permettra de repérer les démonstrations de cours qu'il est possible de faire au collège.

Chaque enseignant peut choisir (si possible en équipe) les démonstrations qu'il travaillera avec ses élèves.

Cette liste n'est ni exhaustive, ni obligatoire.

Thème A - Nombres et calculs

Nombres entiers et fractions :

- Égalité de fractions : $\frac{k\times a}{k\times b} = \frac{a}{b}$, quels que soient les nombres a, b et k avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$. Utilisation d'un exemple générique en classe de 5^{e}. ***(voir annexe 1)***

- Egalités de fraction et produit en croix : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, quels que soient les nombres a, b, c et avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. *RA « Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité » : Ainsi l'égalité de deux fractions peut être mise en relation avec le produit en croix.*

- Opérations sur les fractions. *RA « Les fractions » : A propos de la somme de deux fractions : « l'élaboration d'un raisonnement utilisant des exemples génériques peut venir en appui d'une remédiation ».*

  - Démonstration à partir de la définition du quotient de : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$ quels que soient les nombres a, b, c et d avec b ≠ 0 et d ≠ 0 ***(voir annexe 2)***

  - Démonstration à partir de la définition du quotient de : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ quels que soient les nombres a, b, c avec b ≠ 0 ***(voir annexe 3)***

  - Démonstration à partir de la définition du quotient de a/b : c/d = a/b × d/c quels que soient les nombres a, b, c et d avec b ≠ 0, c ≠ 0 et d ≠ 0 ***(voir annexe 4)***

- Démontrer des critères de divisibilité (par exemple par 2, 3, 5 ou 10) ou la preuve par 9.
  - En 5°: Utilisation d'un exemple générique ;
  - En 3°: utilisation de la lettre en 3^{e} (nombre abcd par exemple). ***(voir travail en atelier)***

Nombres relatifs :

- Différence de deux nombres relatifs : Utilisation d'un exemple générique.

- Produit de deux nombres relatifs : Par disjonction de cas avec utilisation d'un exemple générique.

- « Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse » : démonstration à partir de la définition du quotient et de deux nombres inverses. (classe de 4eme)

- Propriétés des opérations sur les puissances :
  - en 4ème : $10^m \times 10^n$; $10^m/10^n$; $(10^m)^n$ générique sur les puissances de 10 d'exposants positifs ,
  - en 3ème pour les puissances d'un nombre a (différent de zéro) avec des exposants numériques $a^2 \times a^3$, a^3/a^2 , a^2/a^3, $(a^3)^2$

- Distributivité avec des nombres positifs à partir de calculs d'aire de rectangles (4ème ou 5ème).

Thème B - Organisation et gestion de données, fonctions

- Produit en croix : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, quels que soient les nombres a, b, c et avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. *RA « Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité » : Ainsi l'égalité de deux fractions peut être mise en relation avec le produit en croix.* ***(voir travail en atelier)***

- Etablir le fait que, par exemple, augmenter de 5% c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5% c'est multiplier par 0,95.

- Faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.

Thème C - Grandeurs et mesures

- Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes ou les angles.

Thème D - Espace et géométrie

- Symétrie centrale : *RA « Géométrie plane » : leurs (symétries) propriétés de conservation et de transfert peuvent être mises en évidence et utilisées, mais ne sont pas exigibles en évaluation.* A partir des propriétés admises sur la conservation des longueurs et des angles, on peut démontrer la conservation de l'alignement et le parallélisme d 'une droite et de son image par symétrie centrale.

- Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes / internes.

- Propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment. (Utilisation de la symétrie axiale et pourquoi pas de triangles égaux).

- Médiatrices dans un triangle : *RA « Géométrie plane » : « Le concours des médiatrices peut faire l'objet d'une activité de démonstration intéressante. »*

- Triangle : somme des angles.

- Trigonométrie : démonstration des quotients égaux…

- Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales. ***(voir annexe 5)***

- Théorème de Thalès ou propriété sur la proportionnalité des longueurs des côtés dans des triangles semblables (suivant la progression de l'établissement).

- Propriété de Pythagore dans un triangle rectangle. ***(voir annexe 6)***

Ci-dessous des propositions de démonstrations de cours : il nous a semblé intéressant de les proposer. Ce ne sont pas des modèles, ni des obligations. Elles doivent être intégrées dans un scénario et adaptées au niveau des élèves.

Il nous a semblé intéressant de vous les proposer afin d'avoir une vue d'ensemble synthétique des moments où les élèves sont confrontés à des raisonnements analogues. Par exemple, nombre de ces démonstrations utilisent la définition du quotient : ce raisonnement est délicat puisqu'on s'appuie sur l'unicité du quotient pour justifier. Il peut donc être formateur pour les élèves de rencontrer ce raisonnement à plusieurs reprises dans leur scolarité.

Annexe 1 :

On veut démontrer que quels que soient les nombres *a, b et k avec b ≠ 0 et k ≠ 0* $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b} \times kb = \frac{a}{b} \times b \times k = a \times k$ (d'après la définition du quotient).

Or, $\frac{ka}{kb}$ est LE (seul) nombre qui, multiplié par kb donne ka, donc : $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

Suivant le niveau des élèves, on pourra faire cette démonstration sur un exemple générique en précisant bien que le raisonnement proposé se généralise quels que soient les nombres proposés.

Annexe 2 : extrait du document ressources, « compétences travaillées en mathématiques, calculer ».

Utiliser un exemple générique

En parallèle des écritures littérales, le recours à un exemple générique peut permettre de faire comprendre une démonstration à des élèves qui pourraient être déroutés par une approche purement formelle.

Ainsi, dans l'exemple suivant qui détaille le cas du produit de deux quotients, les calculs numériques menés dans la colonne de gauche peuvent être présentés plutôt que ceux de la colonne de droite, à condition toutefois que le résultat soit énoncé dans sa généralité.

	a, *b*, *c* et *d* sont quatre nombres quelconques ; *b* et *d* sont différents de zéro.
$\frac{2}{7}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7 pour obtenir 2 donc $7\times\frac{2}{7}=2$. De même $3\times\frac{5}{3}=5$	$\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier *b* pour obtenir *a* donc $b\times\frac{a}{b}=a$. De même $d\times\frac{c}{d}=c$
Si on multiplie $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ par 7×3, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $7\times\frac{2}{7}\times3\times\frac{5}{3}$ soit, d'après ce qui précède : 2×5	Si on multiplie $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ par $b\times d$, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $b\times\frac{a}{b}\times d\times\frac{c}{d}$ soit, d'après ce qui précède : $a\times c$.
On en déduit donc que $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7×3 pour obtenir 2×5.	On en déduit donc que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ est le nombre par lequel il faut multiplier $b\times d$ pour obtenir $a\times c$.
Donc $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{7\times3}$.	Donc $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Annexe 3 :

On veut démontrer que quels que soient les nombres a, b et c avec b ≠0, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Proposition de scénario :

- Élaboration d'une conjecture par les élèves : travail sur des partages par exemple.
- Travail avec la classe (il nous parait difficile pour les élèves de découvrir par eux-mêmes cette démonstration pour la première fois. Nous proposons donc ici un travail collégial avec la classe qui pourra être reproduit ensuite par les élèves sur d'autres exemples génériques ou généralisé) :

Première proposition : démonstration avec uniquement des nombres écrits en chiffres :

Démontrons que $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$

Questionnement de l'enseignant : « d'après la définition du quotient, que peut-on dire de $\frac{2}{7}$? de $\frac{3}{7}$? »

On arrive à $\frac{2}{7}\times 7 = 2$ et $\frac{3}{7}\times 7 = 3$

Ainsi $\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)\times 7 = \frac{2}{7}\times 7 + \frac{3}{7}\times 7 = 2 + 3 = 5$

D'après la distributivité D'après la définition du quotient

Analyse de cette proposition : ne pas utiliser le calcul littéral pour cette démonstration peut rassurer les élèves. Toutefois, en s'appuyant sur le langage, il peut paraitre « évident » aux élèves que « deux septièmes plus trois septièmes égale cinq septièmes ».

Proposition 2 :

On peut donc (plutôt ou ensuite) démontrer que : quel que soit le nombre b non nul : $\frac{2}{b}+\frac{3}{b}=\frac{5}{b}$

Proposition 3 : démontrer que quels que soient les nombres a, b, c avec b ≠0 : $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Remarque : ce travail peut être raisonnablement demandé en $4^{\text{ème}}$. Suivant les progressions choisies, on peut choisir d'utiliser la proposition 2 comme première approche avec des nombres positifs, et réinvestir ce raisonnement avec des nombres relatifs et ainsi arriver au cas général.

Témoignage :

-en classe, la conjecture a été faite. Ensuite à l'oral pour les élèves, et de façon collégiale, la démonstration a été écrite au tableau pour deux exemples comme dans la proposition 2. L'enseignant a choisi de demander aux élèves de faire cette démonstration dans le cas général en dehors de la classe.

Un des objectifs du professeur est de motiver (un peu par la contrainte, certes) l'écoute des élèves.

Les élèves savent que, de temps à autre, le professeur demande aux élèves de rédiger à la maison ce qui a été élaboré en classe. Dans ce cas l'objectif du travail hors –classe est principalement la compétence « communiquer à l'écrit ». Bien sur, la compétence raisonner est ici beaucoup travaillée aussi car cette démonstration est délicate pour les élèves.

Voici quelques extraits de copies :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \overset{?}{=} \frac{a+c}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) \times b = \frac{a}{b} \times b + \frac{c}{b} \times b = a+c$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) \times b = a+c$$

$\frac{a+c}{b}$ est le nombre qui multiplier par b donne a+c

donc $\frac{a+c}{b} \times b = a+c = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) \times b$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Cette élève a très bien compris : on peut photocopier des travaux d'élèves et les coller dans le cours, même si la rédaction n'est pas complètement conforme à ce que nous ferions. On peut accepter une « rigueur convenable ». En effet les élèves sont fiers d'avoir leur démonstration en écrit de référence.

Pour démontrer que $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, il faut :

$\frac{a}{b}$ = c'est ce qui multiplié par b donne a.

$\frac{c}{b}$ = c'est ce qui multiplié par b donne c.

Or $\frac{a}{b} = a$ et $\frac{c}{b} = c$.

Donc si $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = a+c$ alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Et $a+c = \frac{a+c}{b}$.

Cette élève (en grande difficulté) a essayé de faire appel à sa mémoire mais n'a pas compris : on peut projeter cette copie (ou faire des photocopies) et demander à la classe de commenter ce travail. Travailler sur le fait que $\frac{a}{b}$ est **<u>un nombre</u>**

et que $\frac{a}{b}$ n'est pas égal à a,

en général. A ce stade cet élève n'est pas capable de comprendre la démonstration dans son ensemble : il faut le faire avancer sur la compréhension du quotient et plus tard, revenir sur des démonstrations algébriques. On peut aussi invalider l'égalité avec un contre-exemple. Et faire réfléchir les élèves sur l'égalité écrite

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = a+c$ « c'est toujours faux ? » « l'égalité peut-elle être vérifiée ? »

quel que soit les nombres relatifs a, b et c avec b différent de 0 :

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} = a+c$

car $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplier par b donne a.

$\frac{c}{b}$ est le nombre qui multiplier par b donne c.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) \times b = \frac{a}{b} \times b + \frac{c}{b} \times b = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} = a+c$$

On développe $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) \times b$

On trouve le même résultat en procédant de 2 façon différentes, donc on peut dire que $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

En projetant les travaux d'élèves, on peut travailler la rédaction d'une démonstration.

Cet élève possède le sens de la définition et a compris qu'il fallait l'utiliser .

Mais il n'est pas clair qu'il l'ait reconnu

dans $\frac{a}{b} \times b + \frac{c}{b} \times b =$ $a+c$

Annexe 4 : Une trace écrite possible dans le cours

Activité numérique, démonstration générique avec l'enseignant, puis généralisation de la propriété du quotient des nombres relatifs en écriture fractionnaire.

1° La division de 2 nombres relatifs en écriture décimale.

$3 : 4 = ?$ $\quad 3 : 4 = 0{,}75$

$3 : 4 = \frac{3}{4}$

et $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$

donc $3 : 4 = 3 \times \frac{1}{4}$

Remarque : diviser 3 par 4 revient à multiplier 3 par l'inverse de 4.

propriété : a et b étant 2 nombres relatifs, $(b \neq 0)$

$a : b = a \times \frac{1}{b}$

et diviser un nombre par b revient à le multiplier par l'inverse de b.

2° Diviser 2 nombres relatifs en écriture fractionnaire :

$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} \stackrel{?}{=} \boxed{\frac{5}{7} \times \frac{3}{2}}$

démonstration générique

vérifions que $\boxed{\frac{5}{7} \times \frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$

$\boxed{\frac{5}{7} \times \underbrace{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}}_{1} = \frac{5}{7} \times 1 = \frac{5}{7}$ et donc $\boxed{\frac{5}{7} \times \frac{3}{2}}$ est bien le nombre qui multiplié par $\frac{2}{3}$ donne $\frac{5}{7}$; c'est le quotient de $\frac{5}{7}$ par $\frac{2}{3}$

propriété : a, b, c et d sont quatre nombres relatifs quelconques (non nuls)

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Annexe 5 : **Démonstrations des propriétés du parallélogramme**

Nous vous proposons ici des idées de démonstrations qui utilisent les triangles égaux et les angles alternes-internes. Les prérequis peuvent être donnés aux élèves. Suivant les compétences mathématiques que l'on veut travailler, on se contentera d'une « démonstration visuelle » ou on attendra une rédaction complète.

Prérequis

Définition
Deux triangles sont égaux lorsque leurs côtés ont deux à deux la même longueur.

Propriété (E1)
Si deux triangles sont égaux alors leurs angles ont deux à deux la même mesure.

Propriété (E2a)
Si deux triangles ont deux à deux un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure alors ils sont égaux.

Propriété (E2b)
Si deux triangles ont deux à deux un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur alors ils sont égaux.

Propriété (A)
Si deux angles alternes internes sont formés par deux droites parallèles alors ils ont la même mesure.

Propriété (A')
Si deux angles alternes internes ont la même mesure alors ils sont formés par deux droites parallèles.

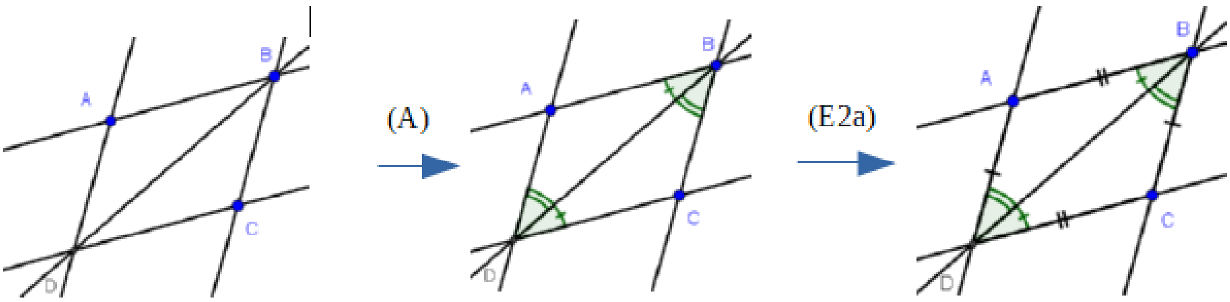
Propriété (O)
Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure.

Propriété (SA)
La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Définition
Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.

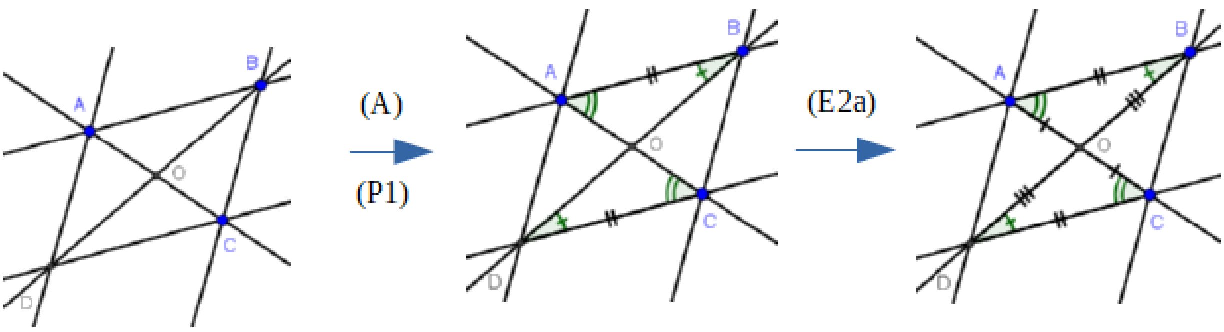
Propriété (P1)
Si un quadrilatère est u parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur.

Idée de démonstration :



Propriété (P2)
Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

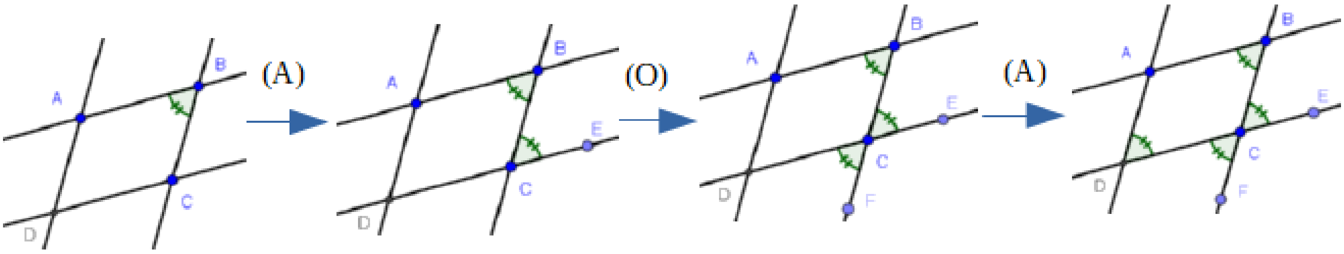
Idée de démonstration :



Propriété (P3)

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure.

Idée de démonstration :

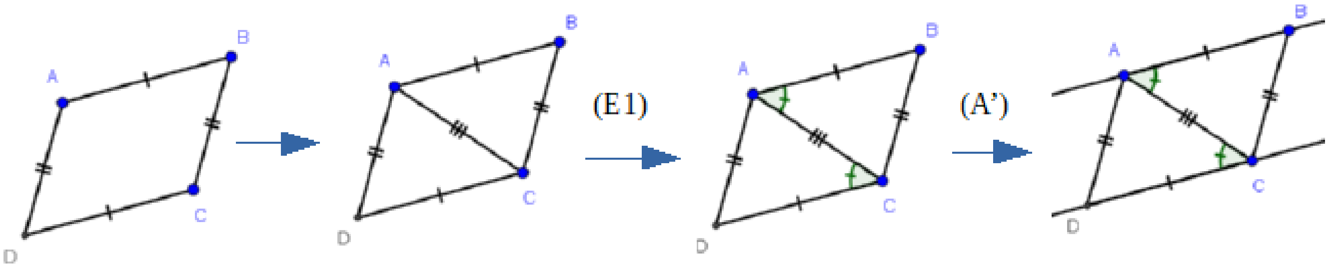


et de même $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$

Propriété (P1')

Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Idée de démonstration :

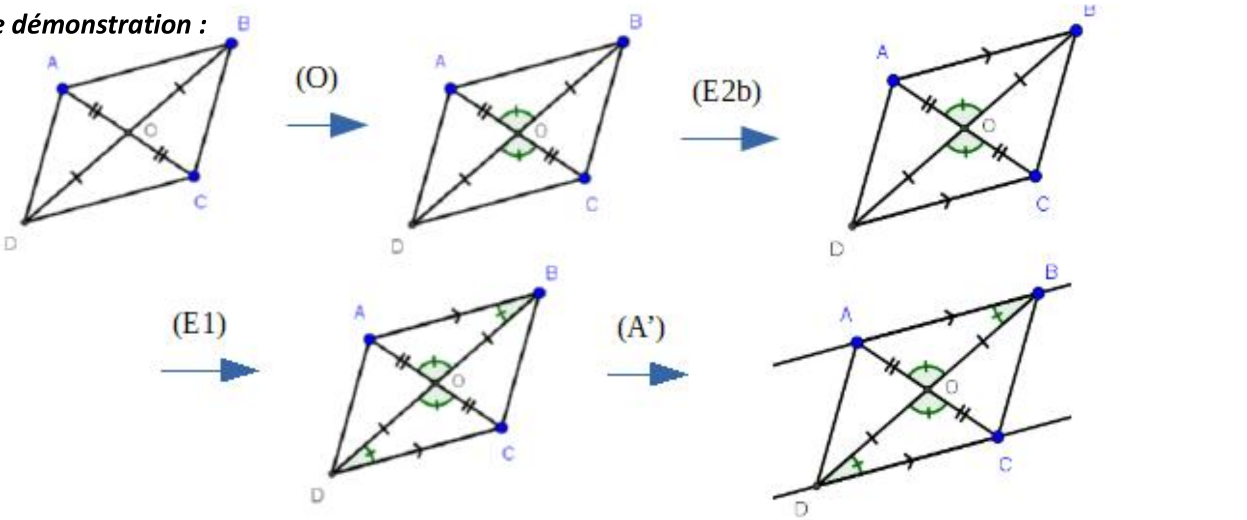


et de même (AD)//(BC)

Propriété (P2')

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

Idée de démonstration :

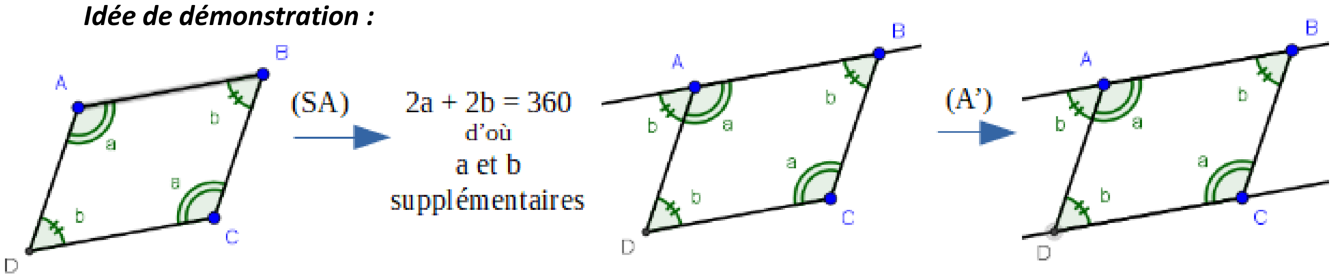


et de même (AD)//(BC)

Propriété (P3')

Si un quadrilatère a ses angles opposés de même mesure alors c'est un parallélogramme.

Idée de démonstration :

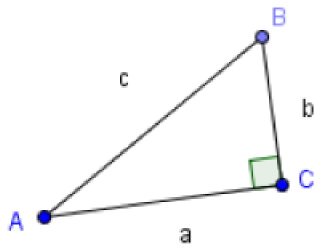


et de même (AD)//(BC)

Annexe 5 :

Voici une démonstration de la propriété de Pythagore utilisant les triangles semblables. Cette démonstration ne pourra pas être obligatoirement faite au moment où on fait la leçon sur la propriété de Pythagore (suivant les progressions choisies). Nous avons conscience que cette démonstration est très guidée. C'est la raison pour laquelle nous la considérons davantage comme une application de la leçon sur les triangles semblables que comme un apprentissage à la démonstration.

3ᵉ – Démonstration du Théorème de Pythagore



On considère un triangle ABC rectangle en C.

On note AC = a, BC = b et AB = c.

1. Placer sur la figure le point D sur [AB] tel que (CD) soit perpendiculaire à (AB).

On note AD = d, et BD = e

2. Démontrer que les triangles ADC et ABC sont semblables.
3. En déduire une égalité de trois quotients.
4. En déduire une égalité de quotients faisant intervenir les nombres a, c et d.
5. En déduire une expression de a^2 en fonction de c et d.
6. De la même façon, déterminer une expression de b^2 en fonction de c et e.
7. Prouver que $a^2 + b^2 = c^2$

Coups de pouces possibles (individuels, en cas de blocage)

– <u>En cas de méconnaissance du cours</u> : Fiche de rappel de définitions et propriétés sur les triangles semblables et les produits en croix, à connaître pour la prochaine fois.

– <u>Question 1.</u>

« Place un point D sur (AB). Est-ce que (CD) est perpendiculaire à (AB) ?»

– <u>Question 2.</u>

« A quelle(s) condition(s) peut-on affirmer que deux triangles sont semblables ?»

« Y a-t-il des angles égaux sur la figure ?» « Lesquels ? »

– <u>Question 3.</u>

« Peux-tu trouver, dans ton cours ou dans la fiche de rappel, une propriété utile pour répondre à cette question ?»

« Peux-tu écrire les longueurs qui se correspondent dans les triangles semblables ADC et ABC ? »

« Que peux-tu dire de ces longueurs ?»

- Question 4.

« Peux-tu remplacer les longueurs par les lettres qui les représentent ?

- Question 5.

« Quelle propriété peux-tu utiliser si tu sais que deux quotients sont égaux ? »

« Connais-tu la propriété des produits en croix ? »

- Question 6.

« A quels triangles faut-il s'intéresser pour répondre à cette question ?

- Question 7.

« Peux-tu transformer l'expression $a^2 + b^2$ en utilisant des propriétés de calcul ? »

« Peux-tu exprimer c en fonction de d et e ?

A connaître

Définition
Deux triangles sont semblables lorsque leurs angles ont deux à deux la même mesure.

Propriété (S1)
Si deux triangles ont deux à deux deux angles de même mesure alors ils sont semblables.

Propriété (S2)
Si deux triangles sont semblables alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

Propriété (S2')
Si deux triangles ont leurs côtés de longueurs proportionnelles alors ils sont semblables.

Propriété (PC) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$

Démonstration du théorème de Pythagore et de sa réciproque

Prérequis

__Définition__
Deux triangles sont égaux lorsque leurs côtés ont deux à deux la même longueur.

__Propriété__ (E1)
Si deux triangles sont égaux alors leurs angles ont deux à deux la même mesure.

__Définition__
Deux triangles sont semblables lorsque leurs angles ont deux à deux la même mesure.

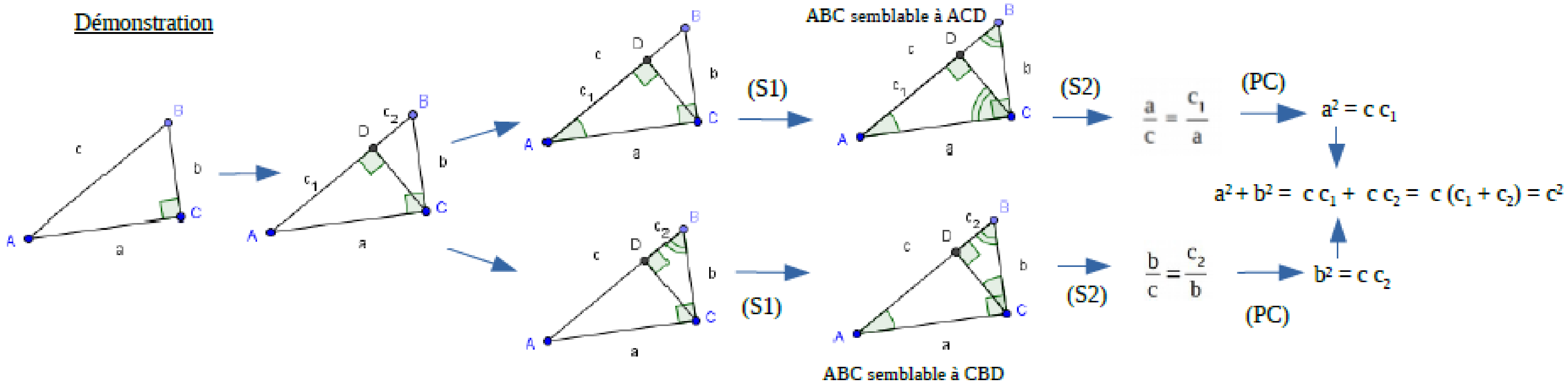
__Propriété__ (S1)
Si deux triangles ont deux à deux deux angles de même mesure alors ils sont semblables.

__Propriété__ (S2)
Si deux triangles sont semblables alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

__Propriété__ (PC)
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$

__Théorème de Pythagore__ (P)
Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

__Démonstration__



__Réciproque du théorème de Pythagore__
Si dans un triangle le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

__Démonstration__