

Extrait du document ressource : Raisonnement et démonstration au collège

Document en version intégrale disponible à l'URL
<http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/college/textes/>

SOMMAIRE

Introduction : ce que dit le programme de collège.....	1
1. Le raisonnement mathématique.....	2
a) Différents types de raisonnement	2
b) Démarche d'investigation et raisonnement	3
c) Raisonnement et démonstration formalisée.....	6
d) Démonstration et argumentation.....	9
e) Énoncés ouverts et raisonnement	10
2. Le raisonnement dans les différents champs des mathématiques du collège	13
a) Dans le domaine de la géométrie.....	13
b) Dans le domaine du calcul	16
c) Le raisonnement dans le domaine de la gestion de données, des probabilités et des statistiques.....	19
3. Raisonnement et évaluation	23
a) Qui valide, qui évalue le raisonnement, la démarche ?.....	24
b) Quel « support » choisi (écrit, oral) ?	24
ANNEXE : Le raisonnement en mathématiques et ailleurs	26
1. Raisonnement et pratique sociale	26
2. Le français et les sciences humaines.....	28
a) Le français	28
b) L'histoire et la géographie	28
3. Les sciences expérimentales et la technologie.....	29
a) Les sciences expérimentales	29
b) La technologie.....	29

« ...Introduction : ce que dit le programme de collège

deux étapes doivent être clairement distinguées : la première, et la plus importante, est la recherche et la production d'une preuve ; la seconde, consistant à mettre en forme la preuve, ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré. En effet des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve. C'est pourquoi il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège. ...»

« ... Ainsi, ce document a l'ambition de rappeler que :

- raisonner en mathématiques, ce n'est pas seulement pratiquer le raisonnement déductif,
- un raisonnement déductif peut être considéré comme complet même s'il n'a pas une mise en forme canonique,

et de contribuer à la prise en compte dans les classes de cette diversité. ... »

«... On peut distinguer, dans le domaine scientifique, deux types de raisonnement :

- le raisonnement par induction et présomption : de l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs) on déduit, par présomption, une propriété générale ;
- le raisonnement par déduction : à partir de propriétés reconnues comme vraies, par enchaînement logique, on déduit une propriété. ... »

« ... Les élèves seront amenés à raisonner en alternant :

1. des temps de recherches individuelles laissant une certaine autonomie à l'élève qui doit choisir des directions, émettre des hypothèses (en mathématique on dira faire des conjectures), faire des essais (expérimentations) avec des allers-retours possibles. Le professeur observe la progression des élèves, peut échanger avec quelques-uns pour ne pas les laisser en situation de blocage ou éviter qu'ils se dirigent trop longtemps sur une voie sans issue, et surtout repère tous les éléments qui lui permettront de gérer la réflexion collective ;
2. des temps d'échanges oraux permettant aux élèves de proposer leurs idées, de les argumenter, de les justifier, de valider ou de rejeter les propositions de leurs camarades. ... »

« ... **Raisonnement par l'absurde**

Le raisonnement par l'absurde est pratiqué par le professeur, comme forme plus simple d'un raisonnement par contraposée, par exemple pour démontrer la réciproque du théorème de Pythagore... »

« ... **Contre-exemples**

Parallèlement au travail mené dans les classes pour convaincre que la vérification d'un énoncé par quelques exemples ne suffit pas à prouver que celui-ci est vrai, il importe de sensibiliser les élèves au concept de contre-exemple. L'arithmétique procure de nombreuses situations parfaitement adaptées à la mise en œuvre d'un raisonnement simple. ... »

« ... **Évaluation de raisonnements à partir de traces écrites :**

Deux principes sont essentiels :

- *On distingue le fond de la forme :*

Comme il a déjà été dit en introduction, la mise en forme de la production d'une preuve ne doit pas donner lieu à un formalisme excessif et/ou prématuré. Cela est vrai au cours de l'apprentissage et, *a fortiori*, lors d'une évaluation sommative. Par conséquent, il y a lieu de distinguer l'évaluation du raisonnement proprement dit de sa mise en forme.

- *On valorise les écrits intermédiaires :*

Des raisonnements écrits sont demandés lors de la résolution de problèmes. Toute solution incomplète et/ou partiellement erronée doit être prise en compte. Autrement dit, il y a lieu de valoriser les réussites partielles des élèves telles que :

- raisonnement exact mais résultat final erroné,
- ébauche de raisonnement avec texte, figure codée ou schéma,
- présence explicite de pistes de résolution mais travail non abouti,
- mobilisation de la « bonne » opération mais erreurs de calcul,
- »

RAISONNEMENT : SYNTHESE

Deux documents « ressource » viennent de sortir récemment, un pour le collège et un pour la seconde. Ils éclairent les attentes en termes de raisonnement et de démonstration. Le document collège, très complet, est à consulter avec attention parce qu'il décrit parfaitement les « compétences » en raisonnement que devrait avoir un élève à l'entrée au lycée. Les évolutions récentes des programmes du collège et la sortie récente de ce document font qu'ils nous semblent nécessaires de consolider ces acquis du collège.

Quelques éléments forts du document « raisonnement et démonstration au collège »

- ✓ Le raisonnement est un enjeu principal de la formation.
- ✓ Il y a deux étapes qui doivent être clairement distinguées : la recherche aussi appelée « raisonnement » et la production de preuves appelée aussi rédaction ou « démonstration ».
- ✓ Deux types de raisonnement sont utilisés : l'induction (pour l'établissement d'une conjecture) et la déduction.
- ✓ La démarche d'investigation décrite dans l'introduction commune aux disciplines scientifiques des programmes de collège est commune à toutes les disciplines scientifiques du collège au lycée.
- ✓ Des types de raisonnement particulier tels que le contre exemple, la disjonction des cas, l'élimination des cas et le raisonnement par l'absurde doivent être connus des élèves.
- ✓ Le raisonnement et la démonstration ne s'approprient pas rapidement : ils demandent un apprentissage continu avec un objectif de réussite pour tous à la fin du collège. Le raisonnement est un attendu du socle commun tandis que la démonstration (rédaction) constitue un attendu des programmes. Des démonstrations même « non parfaites » sont valorisées dans l'apprentissage.
- ✓ Le raisonnement et la démonstration ne se limitent pas au domaine géométrique. La partie numérique recèle de nombreuses situations propices au raisonnement.
- ✓ Toutes les parties du programme (y compris la statistique et les probabilités) doivent exercer le raisonnement.
- ✓ Le raisonnement doit être évalué avec la plus grande attention sous des formes diverses et variées : la place de l'oral et la prise en compte des écrits intermédiaires font partie des incontournables.
- ✓ Le raisonnement dans la vie courante et dans les autres disciplines doit faire l'objet d'explicitations permettant de comprendre les différences et les analogies avec celui utilisé en mathématique.

Quelques éléments forts du document de seconde « notations et raisonnement mathématiques »

- ✓ La logique et le raisonnement présents dans tous les chapitres ne feront pas l'objet d'un chapitre à part. Il est cependant conseillé de prévoir une trace écrite à laquelle l'élève pourra se référer.
- ✓ La logique qui est intrinsèque à tout apprentissage mathématique ne doit pas être apprise pour elle-même (comme dans les programmes de 6^e) mais au travers d'un apprentissage continu qui commence au collège.
- ✓ Les notations seront introduites quand elles seront utiles pour la poursuite de l'enseignement.
- ✓ Les notions ensemblistes simples seront rencontrées sur quelques situations.
- ✓ L'emploi des quantificateurs pourra faire l'objet d'un emploi progressif sans formalisation excessive (concomitamment au langage naturel) afin de faciliter l'écriture de certaines propositions.
- ✓ La différence entre propriété directe et réciproque qui a été souvent vue au collège pourra permettre une extension à la notion d'équivalence quand l'usage s'en fera sentir. De même, les conditions nécessaires et suffisantes pourront être utilisées.
- ✓ Tout comme au collège, on s'appuiera sur les situations de la vie en langage courant pour introduire l'implication, l'utilisation des connecteurs (ou et), la négation...
- ✓ Tout comme au collège, l'évaluation pourra être orale. L'évaluation écrite distinguera le fond de la forme et valorisera les écrits intermédiaires.