Atelier

« Mise en adéquation d'exercices classiques aux objectifs actuels des programme du collège »

1) **Introduction :** Quels changements dans les énoncés que l'on pose aux élèves pourrait-on apporter pour que la résolution de problèmes ait une place centrale dans l'apprentissage ?

Introduction générale pour le collège en mathématiques BO août 2008 :

Les situations choisies doivent:

- *prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves;*
- ***permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous;***
- ***créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures;***
- *rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé;*
- ***fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.***

Les points en gras ont été l'objet d'un travail dans cet atelier à travers la réécriture de quelques énoncés.

2) **Travail sur des réécritures :**

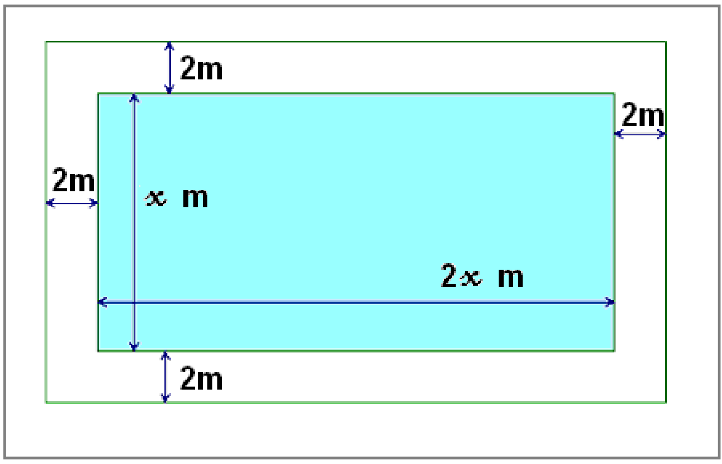
Un exemple d'énoncé tiré d'un manuel dont trois réécritures différentes ont été proposées ainsi qu'une grille à compléter.

Exercice tiré d'un manuel.

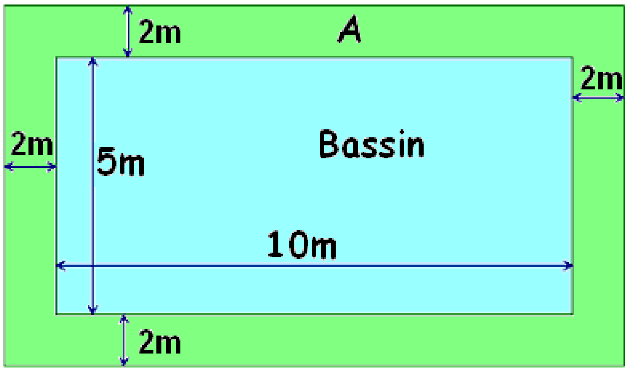
1. Soit $A=(2x+4)(x+4)-2x^2$.

   Développer et réduire l'expression A.

2. On veut construire un bassin rectangulaire entouré d'une bordure de 2m de largeur comme le montre la figure ci-contre. La longueur du bassin est le double de la largeur.
   a. Démontrer que l'aire de la bordure est égale à A.
   b. Calculer les dimensions à donner au bassin pour que l'aire de la bordure soit égale à 100 m².



Réécriture :

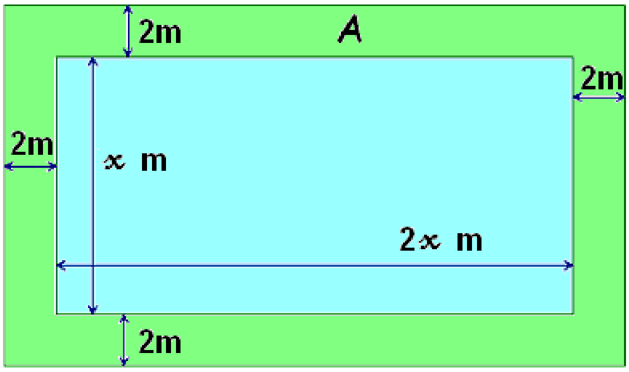


❖ Premier exemple.

On veut construire un bassin rectangulaire entouré d'une bordure de 2m de largeur.. La longueur du bassin est le double de sa largeur.

1. Dans la figure ci-contre, le bassin a pour largeur 5m.
   Montrer, par un calcul, que l'aire A de la bande est égale à 76 m^2.

   Dans la suite de l'exercice, l'unité de longueur utilisée est le mètre. On désigne par x la mesure de la largeur du bassin.

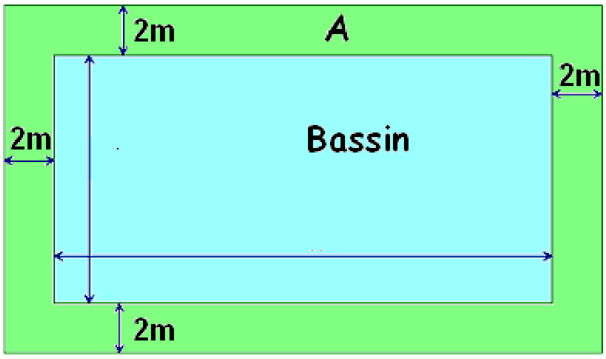


2. a. Proposer une valeur de x pour que l'aire A de la bande soit inférieure à 100m^2.
   b. Proposer une valeur de x pour que l'aire A de la bande soit supérieure à 100m^2.

   c. Proposer une valeur de x pour que l'aire A de la bande soit égale à 100m^2.

3. Montrer que l'aire A de la bande peut s'écrire $A = 12x + 16$.
4. La valeur de x trouvée au 2.c) est-elle unique ?

❖ Deuxième exemple .

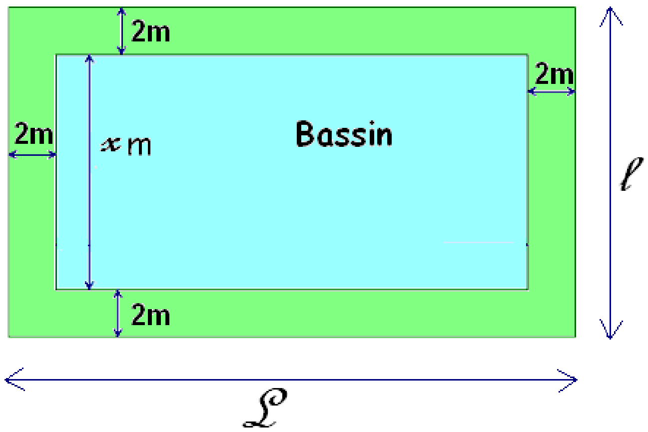


On veut construire un bassin rectangulaire entouré d'une bordure de 2m de largeur comme le montre la figure ci-contre. La longueur du bassin est le double de sa largeur.

Quelles dimensions faut-il donner au bassin pour que l'aire de la bordure soit égale à 100m^2 ?

❖ Troisième exemple.

On veut construire un bassin rectangulaire entouré d'une bordure de 2m de largeur comme le montre la figure ci-contre. La longueur du bassin est le double de sa largeur.



1. Reproduire le schéma à l'échelle $\frac{1}{100}$ lorsque le bassin a pour largeur 7m.

Dans la suite de l'exercice, toutes les longueurs sont exprimées en m et les aires en m².

On désigne par x la mesure de la largeur du bassin.

2. …
   a. Montrer que la mesure $\mathcal{L}$ de la longueur totale est égale à $2x+4$.
   b. Exprimer la mesure ℓ de la largeur totale en fonction de x.
   c. Montrer que l'aire du bassin a pour mesure $2x^2$.
3. En déduire ce que représente l'expression $(2x+4)(x+4)-2x^2$.
4. Montrer que l'aire de la bande peut s'écrire $(12x+16)$ m².
5. Que représente la solution de l'équation $12x+16=100$?

❖ Grille d'analyse des énoncés d'exercices

Compléter par oui lorsque le critère est présent dans l'exercice proposé ;

	critères	Exercice manuel	Premier exemple	Deuxième exemple	Troisième exemple
1	Démarrage pour tous.				
2	Place réduite des questions techniques hors contexte.				
3	Référence au socle commun :				
	Si oui, préciser les questions ?				
4	Possibilité de cheminements divers .				
5	Prise d'initiative personnelle				
6	Graduation de la difficulté				
7	Occasions de contrôle de leur travail pour les élèves. Si oui, préciser les questions ?				

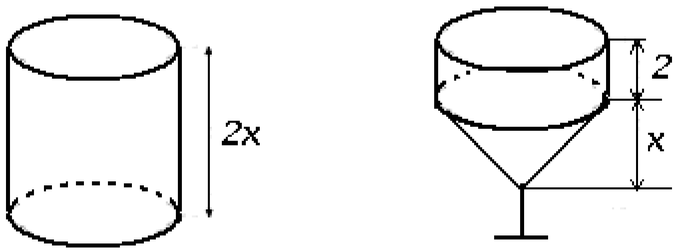
	critères	Exercice manuel	Premier exemple	Deuxième exemple	Troisième exemple
8	Richesse.				
9	Complexité.				
10	Abstraction *faible/moyenne/forte*				

3) **Travail de mise en adéquation.**

Les deux exercices suivant ont été présentés. Le but a été de proposer une mise en adéquation des énoncés distribués, aux objectifs actuels des programmes du collège.

Exercice 1 *DNB Polynésie, septembre 2000*

Dans tout le problème, les longueurs sont exprimées en cm, et les volumes en cm^3



On rappelle que le volume du cylindre de révolution d'aire de base *S* et de hauteur *h* est donné par la formule

$$V = S \times h$$

On rappelle que le volume d'un cône de révolution d'aire de base *S* et de hauteur *h* est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h.$$

Partie I : On considère les deux verres représentés ci-dessus.

- le premier verre est un cylindre de révolution dont l'aire de base est 30 et dont la hauteur mesure $2x$, où x est un nombre positif, $x \leq 4$.
- Le deuxième verre est constitué d'un cône dont l'aire de base est 30 et dont la hauteur mesure x, surmonté d'un cylindre dont l'aire de base est 30 et dont la hauteur vaut 2.

Soient V_1 le volume du premier verre et V_2 le volume du deuxième verre.

1. Exprimer ces volumes en fonction de x
2. a. V_1 est-il proportionnel à x ? Justifier.
   b. V_2 est-il proportionnel à x ? Justifier.

Partie II. *Cette partie peut être traitée même sans avoir résolue la partie I.*

1. a. Tracer dans un repère orthogonal (*O,I,J*) en prenant :
   - 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses ;
   - 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées

   On placera l'origine O du repère en à gauche de la feuille.

   b. Dans ce repère, construire les représentations graphiques des fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$f_1(x) = 60x \quad \text{et} \quad f_2(x) = 10x + 60$$

2. Résoudre l'équation suivante : $60x = 10x + 60$

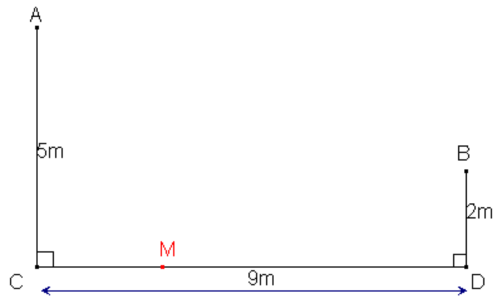
3. retrouver sur le graphique la solution de cette équation, en faisant apparaître en couleur les tracés effectués.

Exercice 2

Anne est à sa fenêtre en A et Béatrice à sa fenêtre en B.
Michel est en M à la distance *x* de C.

a. Exprimer AM^2 et BM^2 en fonction de *x*.

b. A quelle distance de C Michel doit-il se placer pour être aussi près d'Anne que de Béatrice ?

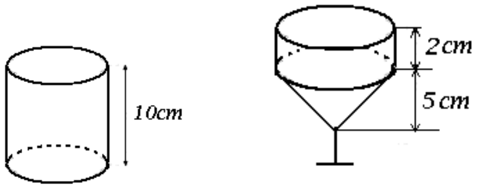


Après synthèse, voici quelques propositions de réécritures :

Réécriture 1

Partie I

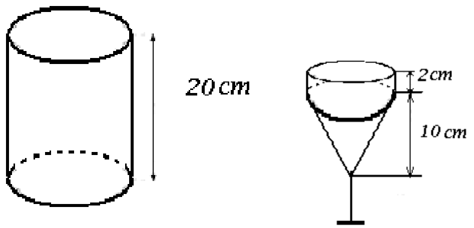
On considère deux verres représentés ci-contre.



-Le premier verre est un cylindre de révolution dont <u>l'aire de base</u> est **30 cm²** et dont la hauteur est 10 cm

- Le deuxième verre est constitué d'un cône dont l'aire de la base est 30 cm² ,dont la hauteur est 5 cm ,surmonté d'un cylindre dont l'aire de base est 30 cm² et la hauteur est 2 cm.

1) Calculer le volume V_1 et V_2 de chaque verre.
2) Refaire les calculs pour 20 cm de hauteur du verre 1 et 10 cm de hauteur du cône du verre 2.



3) a) Ranger les résultats obtenus précédemment dans les tableaux de valeurs ci-dessous

<u>Pour le verre 1 :</u>

Hauteur du cylindre en cm	10	20
Volume en cm^3		

<u>Pour le verre 2 :</u>

Hauteur du cône en cm	5	10
Volume en cm^3		

b) Dans chaque cas ,dire si ces tableaux sont des tableaux de proportionnalité .Justifier .

4) Peut-on conjecturer sur la proportionnalité

pour le verre 1 ? pour le verre 2 ?

<u>Partie II</u>

On décide donc de vérifier les observations .

On note x la mesure en cm de la hauteur du cône du verre 2 et $2x$ celle du cylindre du verre 1.

1) Vérifier que le volume du verre1 peut s'écrire $V_1 = 60\,x$ en cm^3 et le volume

$V_2 = 10\,x + 60$ en cm^3.

2) a) Tracer un repère orthogonal (O,I, J) en prenant :

2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;

1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées .

On placera l'origine O du repère en bas à gauche de la feuille

b) Dans ce repère, construire les représentations graphiques des fonctions f_1 et f_2 définies par :

$f_1(x) = 60\,x$ et $f_2(x) = 10\,x + 60$

3) Peut-on vérifier graphiquement ,les conjectures de la partie I concernant la proportionnalité du volume et de la hauteur dans les cas du verre 1 puis du verre 2.

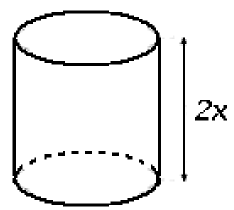
4) Pour quelle valeur de x les volumes des deux verres sont-ils égaux ?

a) par une lecture graphique

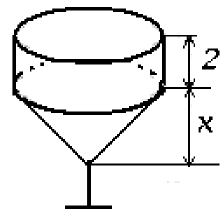
b) Retrouve cette valeur par le calcul .

Réécriture 2

Partie 1 : On prend pour base du cylindre pour les deux verres 30 cm².



Verre modèle 1



Verre modèle 2

1) On prend $x = 5$ cm
   a. Déterminer que le volume V_1 d'un verre du modèle 1 vaut 300 cm^3.
   b. On rappelle la formule du cône : $V = \frac{1}{3} S \times h$.

   Prouver que le volume V_2 d'un verre du modèle 2 vaut 110 cm^3.

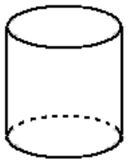
2) Sachant qu'un centilitre vaut 10 cm^3, quel est le volume en centilitres de V_1 ?
3) Trouver une valeur de x pour que le verre du modèle 2 ait pour contenance 15 centilitres.
4) Dans cette question, on cherche à trouver une valeur pour que les verres aient la même contenance.
   a. Exprimer que $V_2 = 10\,x + 60$
   b. Exprimer V_1 en fonction de x .
   c. Trouver la valeur de x pour avoir $V_1 = V_2$. Quel volume ont alors les verres ?
5) On voudrait que le volume du verre de modèle 2 soit de 25 cL (soit 250 cm^3). Quelle valeur faut-il prendre pour x ?

Réécriture 3

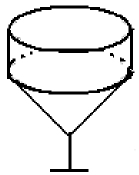
Un verrier propose des verres de différentes formes et de différentes tailles.

Le premier modèle est un verre en forme de cylindre de révolution, le deuxième en forme de cône de révolution surmonté d'un cylindre de révolution

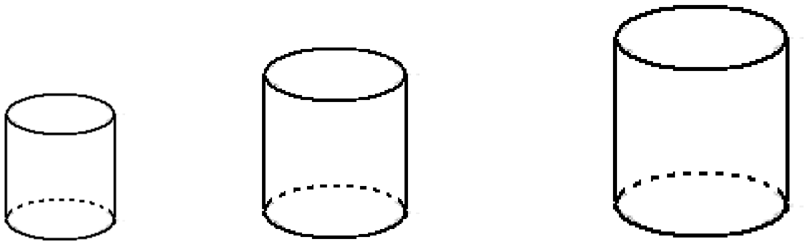
Modèle 1



modèle 2



Partie 1 : On s'intéresse dans cette partie à trois verres du premier modèle :



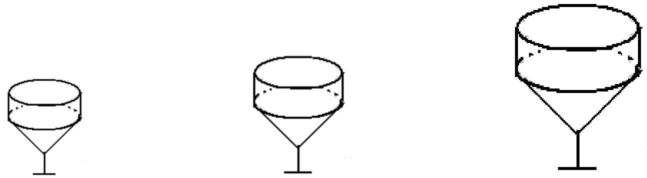
h= 4 cm h= 6 cm h = 12 cm

a) Calculer le volume de chaque verre.
b) Construire le tableau et compléter à l'aide des calculs précédents.

Hauteur du verre modèle 1 (cm)	4	6	12
Volume du verre (en cm^3)			

c) Est-ce un tableau de proportionnalité ? Peut-on affirmer que le volume du verre est proportionnel à sa hauteur ?

Partie 2 : On s'intéresse dans cette partie à trois verres du modèle 2 :



$h_{cône}$ = 2 cm $h_{cône}$ = 3 cm $h_{cône}$ = 6cm

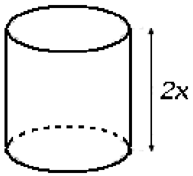
a) Calculer le volume de chaque verre en cm^3 .
b) Construire le tableau et le compléter à l'aide des calculs précédents :

Hauteur du verre modèle 2 (en cm)			
Volume du verre (en cm^3)			

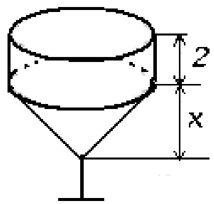
c) Est-ce un tableau de proportionnalité ? Le volume du verre du modèle 2 est-il proportionnel à sa hauteur ?

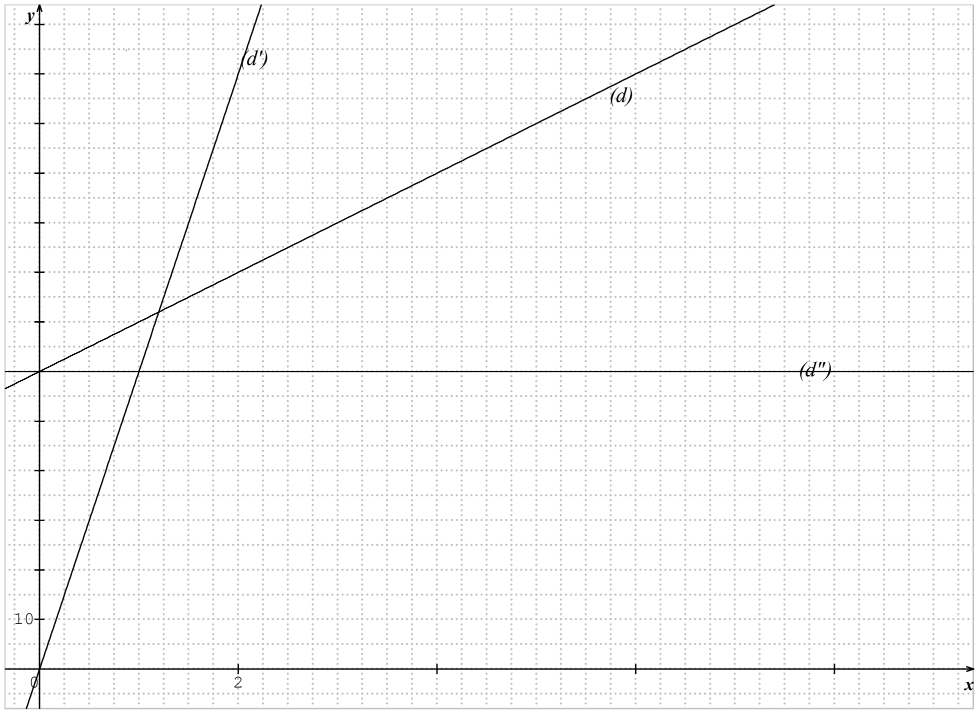
Partie 3 : on s'intéresse aux deux modèles différents simultanément

Modèle 1



modèle 2





1) Dans ces deux questions il s'agit d'exprimer les volumes des verres en fonction de x.

a) Prouver que le volume V_1 d'un verre du modèle 1 peut s'écrire : 60x
b) Prouver que le volume V_2 d'un verre du modèle 2 peut s'écrire : 10 x + 60

2) On étudie maintenant deux fonctions et leurs représentations graphiques.

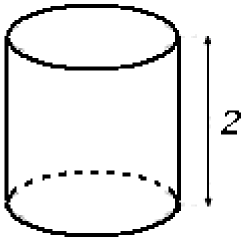
Voici deux fonctions : $f(x) = 10x + 60$. et $g(x) = 60\,x$

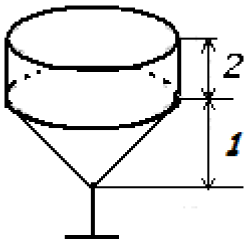
Voici, dans un même repère, trois représentations graphiques :

a) Associer aux fonctions f et g leur représentation graphique en justifiant.
b) Que représentent les fonctions f et g pour les verres des modèles 1 et 2 ?
c) En utilisant le graphique et en passant en couleur les tracés effectués, déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$
d) Retrouver ce résultat par le calcul
e) Interpréter le résultat précédent pour les verres des modèles 1 et 2, et donner la hauteur de chaque verre.

Réécriture 4
(version ouverte)

Dans tout le problème, les longueurs sont exprimées en cm, et les volumes en cm^3





On rappelle que le volume du cylindre de révolution d'aire de base *S* et de hauteur *h* est donné par la formule $V = S \times h$

On rappelle que le volume d'un cône de révolution d'aire de base *S* et de hauteur *h* est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h.$$

1. Si je verse le contenu du verre à pied dans le verre cylindrique, est-ce que cela déborde ?
2. Idem que précédemment.

4) <u>Conclusion :</u>

<u>Les situations choisies doivent:</u>

- ***<u>prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves;</u>***
- ***<u>permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous;</u>***
- ***<u>créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures;</u>***
- ***<u>rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé;</u>***
- ***<u>fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.</u>***

<u>UN EXEMPLE EN NUMERIQUE</u>

<u>Version classique :</u> **On donne l'expression A=** ***(2 x - 5)² – 7 (3 x + 5)***

- ***Développer et réduire l'expression littérale A***
- ***Calcule la valeur de l'expression A pour x = 10***

<u>Réécriture :</u>

Dans une classe de troisième a été donné l'exercice suivant :

« *Développer et réduire l'expression littérale : (2 x - 5)² – 7 (3 x + 5)* »

Voici les résultats trouvés par trois élèves :

Marc : $4x^2 - x + 60$

Sophie : $4x^2 - 41x - 10$

Nadine : $4x^2 - 21x - 210$

On donne les résultats suivants des valeurs de chaque expression pour x =10 et x = 2

	x	10	2
Expression du texte	$(2x-5)^2-7(3x+5)$	-20	-76
Marc	$4x^2-x+60$	450	74
Sophie	$4x^2-41x-10$	-20	-76
Nadine	$4x^2-21x-210$	-20	-236

1) **Sans développer ni factoriser aucune des expressions**, vérifier la valeur prise par chacune de ces 4 expressions littérales pour $x = 10$. On détaillera tous les calculs.

2) Recommencer la question 1) pour $x = 2$.

3) Peut-on déduire des quatre résultats trouvés à la question 1 (dont les résultats se trouvent dans la 3ème colonne) que l'un des trois élèves s'est trompé ? Si oui, lequel et pourquoi en est-on sûr ?

4) Peut-on déduire des quatre résultats trouvés à la question 2 (dont les résultats se trouvent dans la 4ème colonne) qu'un autre des trois élèves s'est trompé ? Si oui, lequel et pourquoi en est-on sûr ?

5) Prouver que l'élève qui reste a trouvé la bonne réponse.