Approche probabiliste d'une intégrale

Soit g la fonction numérique définie pour tout x appartenant à $[0; 1]$ par $g(x) = x(1 - x)\,\mathrm{e}^{2x}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) À l'aide du logiciel (ou de la calculatrice) représenter la courbe C.

   (b) Soit I, J et K les points de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$. Observer la position de la courbe C par rapport au carré $OIKJ$.

   Dans la suite de l'exercice, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant g(x)$.
   On admet que, lorsqu'on choisit un point au hasard à l'intérieur du carré $OIKJ$, la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$ est proportionnelle à l'aire sous la courbe C.

   On choisit au hasard un point à l'intérieur du carré $OIKJ$. On cherche quelle est la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$.

2. (a) À l'aide d'un tableur, simuler le tirage d'un échantillon de 200 points à l'intérieur du carré $OIKJ$ et déterminer la fréquence f_1 des points appartenant à $\mathcal{D}$ dans cet échantillon.

   (b) Réaliser 9 autres simulations de tirages d'échantillons de 200 points choisis au hasard dans le carré $OIKJ$ et compléter le tableau de valeurs suivant, où k est le rang de l'échantillon et f_k la fréquence des points appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}$ dans l'échantillon de rang k.

rang k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquence f_k										

   Donner des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près.

   (c) À l'aide d'autres simulations, émettre une conjecture sur la probabilité que le point choisi appartienne à l'ensemble $\mathcal{D}$.

3. Calculer la probabilité que le point choisi aléatoirement dans le carré $OIKJ$ appartienne à l'ensemble $\mathcal{D}$.
   Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice ainsi que la cohérence de l'ensemble des résultats obtenus.