La notion de fonction dans les programmes

Mardi 16 décembre 2008

Inter académiques AVIGNON

Académie de Toulouse

I- Une valse à quatre temps

Une question récurrente :

- Nouveauté de la réforme de.....1902
- Point de vue abstrait de 1969 à 1973
- Infléchissement après 1977
- Les programmes de collège de 1997 et de seconde de 2000

Qui reste un problème d'actualité

Programme de troisième publié au BO spécial n°6 du 28 août 2008

II- Les raisons du changement

- Concept unificateur.
- Point de vue didactique.
- Changement de statut du graphique dans l'enseignement.
- Vision moins réductrice de la notion de fonction.

EVOLUTION DANS LES PROGRAMMES DE 3ème DE 1998 à 2008

- Passage des grandeurs aux mesures.
- Formalisme plus affirmé.
- Fonctions linéaires et affines : cas particuliers.
- Impact sur l'apprentissage en 2nde.

III- Construction de la notion de fonction au collège (B.O. 2008)

	Commentaires B.O n°6 du 28 Août 2008 **et document d'accompagnement** **« Proportionnalité »**	**<u>Exemples de situations</u>** **(Cf. doc. d'accompagnement : « proportionnalité » juil. 2005 et « grandeurs et mesures » sept. 2007)**	**<u>Ecritures possibles</u>** **et <u>notations</u> (idem)**
6e **Proportionnalité** **Grandeurs et mesures**	*Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent **<u>dans le cadre des grandeurs</u>** (longueurs, masses, prix...) Ils doivent relever de domaines familiers des élèves et rester d'une complexité modérée.* ***<u>L'étude de la proportionnalité dans le cadre purement numérique relève de la classe de 5ème.</u>*** *-Utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal.* *-Utilisation du coefficient de proportionnalité, entier ou décimal.* *-passage par l'image de l'unité.* ***Certains travaux sur les périmètres conduisent à décrire des situations mettant implicitement en jeu des fonctions, notamment à travers l'utilisation de formules .Des expressions telles que« en fonction de » et « est fonction de »sont utilisées** ; par exemple : exprimer le périmètre d'un carré en fonction de la longueur c de son côté…*	**-Prix *en fonction de* la masse,…** -Proportion (mélange). -Pourcentages. -Longueur d'un cercle, aire d'un disque en fonction de son rayon, périmètre d'un carré. -Volume d'un parallélépipède. + Changements d'unités	**Le prix de 7,5 kg est 26 €** **abréviations :** **Prix de 7,5 kg : 26 €** **Prix de 7,5 kg = 26 €** **P de 7,5 kg = 26 €** **(+formulation orale)** ***Comme dans les classes précédentes, l'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens.***

5^e **Proportionnalité** **Grandeurs et mesures**	*Les activités numériques et graphiques font le plus souvent appel à des situations mettant en relation deux grandeurs.* ***Il est possible d'envisager dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur, toute autre variable étant fixée, par exemple dans le cas :*** ***-de l'aire d'un triangle, d'un disque…*** ***-du volume ou de l'aire latérale d'un prisme droit ou d'un cylindre.*** ***Des expressions telles que « en fonction de » et « est fonction de » sont utilisées, mais toute définition de la notion de fonction est exclue****.* *Les procédures utilisées pour traiter une situation de proportionnalité sont de même nature qu'en classe de 6ème* *La proportionnalité commence à être étudiée dans le cadre purement numérique (tableau de nombres) (doc d'acc proportionnalité) .* *L'usage du « produit en croix » est réservé à la classe de 4e où il pourra être justifié en liaison avec l'égalité des quotients.* *Pour les coefficients de proportionnalité ou les rapports de linéarité exprimés sous forme de quotient, on choisira des nombres qui évitent des difficultés techniques inutiles (quotients de nombres décimaux non exigibles)* *De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales.* ***Les questions de changement d'unités sont reliées à l'utilisation de la proportionnalité de préférence au recours systématique à un tableau de conversion.*** *Le fait que le volume d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution est proportionnel :* *-à sa hauteur, lorsque sa base est constante,* *-à l'aire de sa base, lorsque la hauteur est constante,* *est mis en évidence.*	-**Prix en fonction de la masse,….** -Comparer des proportions. -Calcul de pourcentages. -Echelle d'une carte ou d'un dessin. -Relation entre aire ou volume (prisme droit et cylindre) et une de ses dimensions (hauteur) lorsque les autres sont fixées. - Changement d'unités de mesure pour des volumes.	**Le prix de 7,5 kg est 26 €** **abréviations :** **Prix de 7,5 kg = 26 €** **P de 7,5 kg = 26 €** **(+ formulation orale)** **P (7,5 kg) = 26 € (codage)** ***Comme en classe de 6e, l'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens.***

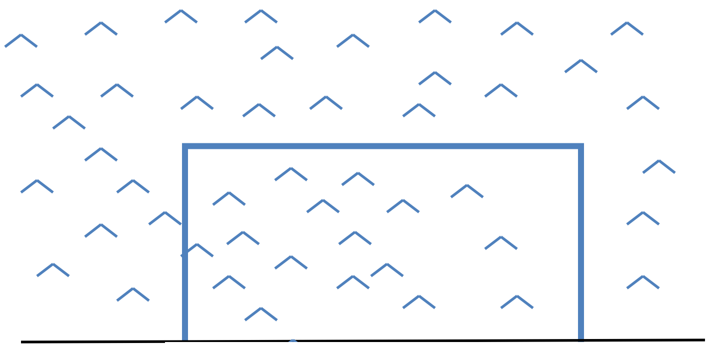
4^{e} Proportionnalité Grandeurs et mesures	*Comme en classe de $5^{\text{ème}}$, le mot « fonction » est employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle de la notion de fonction soit donnée.* *Les tableurs donnent accès à une façon particulière de désigner une variable : par l'emplacement de la cellule où elle se trouve dans le tableau.* *Aux diverses procédures étudiées en classe de 6^{e} et de 5^{e} pour rechercher une quatrième proportionnelle, s'en ajoute une nouvelle, appelée **« produits en croix »** qui doit être justifiée en lien avec l'égalité de quotients* *Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines permettent de mettre en œuvre un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de pourcentage..* *Les élèves travaillent sur des situations de proportionnalité ou de non proportionnalité.* ***Caractérisation graphique de la proportionnalité sans justification.*** ***Cette caractérisation prépare l'association, en classe de 3^{e}, de la proportionnalité à la fonction linéaire.*** *Le travail sur les aires et les volumes se poursuit.* *Les formules d'aires ou de volumes offrent l'occasion d'étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre.* ***La notion de vitesse en tant que grandeur quotient est abordée pour la première fois.***	- Prix en fonction de la masse,… - Echelle d'une carte. -Créer, modifier une feuille de calcul, insérer une formule dans le cadre du travail sur la moyenne pondérée. -notion d'indice. - Thalès. - Agrandissement et réduction. -Cosinus -Volume d'une pyramide ou d'un cône en fonction de la hauteur -Vitesse moyenne, débit, problème de change monétaire, changement d'unités de vitesse. -d=vt	**Le prix de 7,5 kg est 26 €** **…** **p (7,5 kg) = 26 €** **(abréviation)** **7,5 kg $\rightarrow$ 26 € (codage)** ***Comme dans les classes précédentes, l'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens.***

3e **Fonctions** **GrandeurS et mesures**	*L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples,la notion de fonction en tant que* ***processus*** *faisant correspondre,à un nombre,un autre nombre. Le passage des grandeurs aux mesures permet justement une telle formalisation.* *Les exemples mettant en jeu des fonctions sont issues de situations concrètes . Les fonctions linéaires et affines apparaissent alors comme* ***des exemples particuliers*** *de tels processus.* *L'utilisation des expressions « est fonction de » ou « varie en fonction de »,amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et est associée à l'introduction de la notation f(x).* ***L'usage du tableur*** *contribue aussi à la mise en place du concept ,dans ses aspects numériques comme dans ses aspects graphiques.* ***La notion d'équation de droite n'est pas au programme de la classe de 3ème.*** *-Déterminer l'image d'un nombre par une fonction déterminée par une courbe, un tableau de données ou une formule* ***-La notion d'ensemble de définition est hors programme..*** *-Déterminer un antécédent par lecture directe dans un tableau ou sur une représentation graphique. La détermination d'un antécédent à partir de l'expression algébrique d'une fonction n'est exigible que dans le cas des fonctions linéaires et affines.* *Certains traitements des situations de proportionnalité utilisés dans les classes précédentes sont reliés aux propriétés* ***d'additivité et d'homogénéité de la fonction linéaire****.* ***La caractérisation graphique de la proportionnalité peut faire l'objet d'une justification grâce à Thalès.*** *Pour les fonctions affines, la proportionnalité des accroissements de x et y est mis en évidence.* *-Il s'agit aussi d'entretenir les acquis des années précédentes : aires des surfaces et volumes des solides.* *-Les changements d'unités s'appuient, comme dans les classes antérieures, sur des raisonnements directs et non pas sur des formules de transformation.*	Modélisation de la situation (domaine des mesures). On décontextualise : La notation $x \mapsto f(x)$ est utilisée **Exemples de problèmes introductifs :** -Boîte à coins carrés - Aire de baignade - Le quadrilatère qui tourne … … **Autres situations classiques :** -Pourcentages (augmentation, réduction) -Thalès. - Agrandissement, réduction (effet sur aire ou volume). -Sinus, tangente -Longueur d'un ressort en fonction de la masse -Volume de gaz, vitesses, débits, coûts. *-P = mg ;* *-Umax = Uefficace x* $\sqrt{2}$ … -Changements d'unités sur des grandeurs produits et quotients. **-Loi d'Ohm (suite) ;** -Energie cinétique -Ec = 1/2 mv² ,…	**p (7,5) = 26** **$x \mapsto f(x)$** **ou** **f(x) = ….** ***Comme dans les classes précédentes, l'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est légitime. Elle est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens.***

IV- Quelle activité d'étude pour la première séance en $3^{ème}$?

« L’aire de baignade » :

Un maître nageur dispose d’un cordon flottant de 340 m de longueur.
Il veut délimiter un rectangle de manière à ce que l’aire de baignade soit la plus grande possible.
Comment doit-il disposer le cordon ?



- Il s'agit d'un problème dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance;

- Le problème est" consistant ", c'est-à-dire qu'il présente une certaine "résistance". Il ne donne pas lieu à une réponse qui résulte d'un traitement immédiatement reconnu...

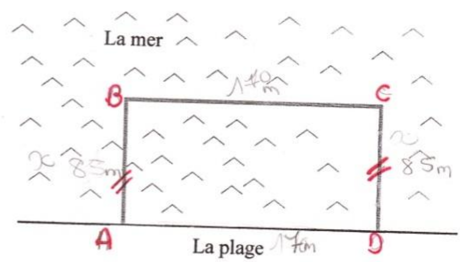
- Donner un problème de recherche, c'est lancer un défi. Il est important que les élèves " fassent leur " le problème et qu'ils aient envie de relever le défi.

- La validation de la solution est laissée le plus possible à la charge des élèves.

Activité : La baignade.

Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 340 m de longueur.
Il veut délimiter un rectangle de manière à ce que l'aire de baignade soit la plus grande possible.

Comment doit-il disposer le cordon ?



1er essay $340 : 2 = 170$ $\quad 170 : 2 = 85$

$340 - 170 = 170$

$L \times l = 170 \times 85 =$

On prend $AB = 80$ m, $CD = 80$ m, BC 180 m

$A_{ABCD} = AB \times BC$

$= 80 \times 180$

$= 14\,400$

$A_{ABCD} = 14\,400 \text{ m}^2$

On prend $AB = 70$ m, $CD = 70$ m, $BC = 200$ m

$A_{ABCD} = AB \times BC$

$= 70 \times 200$

$= 14\,000$

$A_{ABCD} = 14\,000 \text{ m}^2$

Donc l'aire vraie : louis et arnaud

$AB = 85$ m, $BC = 340 - 2 \times 85 = 170$, $CD = 85$ m.

$A_{ABCD} = AB \times BC$

$= 85 \times 170$

$= 14450$

$A_{ABCD} = 14\,450 \text{ m}^2$

Académie Toulouse

cas général : $AB = x$

formule : $340 - 2x$.

$A_{ABCD} = AB \times BC$

$= x \times (340 - 2x)$ ← distributivité

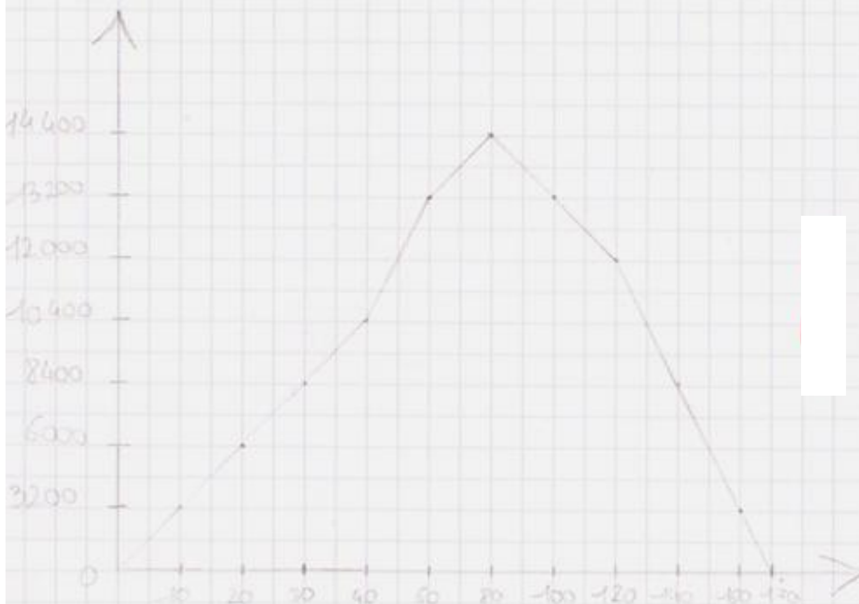
$= \boxed{340x - 2x^2}$

• x varie entre 0 et 170

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
A_{ABCD} = ~~340~~ $340x-2x^2$	0	3[illegible]00	6000	8[illegible]	10400	12000	13200	~~[illegible]~~ 14000	14400	14400	14000	13200	12000	10400	8400	6000	3200	0

il s'emble que l'aire soit maximale pour 85.
le maître nageur doit mettre la boué B a 85 m de la plage.

x	0	10	20	30	40	60	80	100	120	140	160	170
A $340x-2x^2$	0	3200	6000	8400	10400	13200	14400	13200	12000	8400	3200	0



Il semble que l'air soit maximale pour 85 .

Le Maître nageur doit mettre la bouée B à 85 m .

Contenus	Exemple de mise en œuvre	Objectifs	Connaissances et capacités (réinvestissements et nouveaux apprentissages)
<u>Activité</u> : Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 340 m de longueur. Il veut délimiter un rectangle de manière à ce que l'aire de la baignade soit la plus grande possible. Comment doit-il disposer le cordon ?	- Travail individuel de quelques minutes pour s'approprier le problème puis temps de recherche par groupes. - Dans chaque groupe une feuille de recherche individuelle puis une trace écrite commune. - Mise en commun des idées avec un rapporteur par groupe. On voit émerger : - des calculs avec différentes valeurs - l'aire est constante - la largeur du rectangle est 85 m. - des essais pour exprimer l'aire en fonction de la longueur d'un des côtés, mais dans ce cas les élèves sont bloqués pour faire le lien avec l'aire maximale. **Il est alors intéressant de montrer une animation de la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.**	Etudier et chercher un problème ouvert. Expérimenter, travailler dans le **cadre numérique**. Argumenter : notamment pour ceux qui affirment que l'aire est constante. Emettre une conjecture.	S'approprier un problème Prendre des initiatives face à un problème ouvert. Formuler une conjecture Calculer l'aire d'un rectangle. Exprimer une grandeur en fonction d'une autre. Calcul numérique.
On réalise un **tableau de valeurs** et on ébauche un **graphique** comme mode de représentation.	- On collecte les résultats des différents calculs effectués par les élèves avec l'idée de les ranger dans un tableau. - On place les points correspondants à ce tableau dans un repère. Pour affiner la conjecture, la question de la façon de relier les points émerge, d'où la **nécessité d'un plus grand nombre de valeurs et donc d'un moyen plus efficace pour les calculs.**	Passer au **cadre graphique**. **Faire émerger la nécessité de l'introduction du concept de fonction.** Tester et affiner la conjecture précédente.	Placer des points dans un repère à partir d'un tableau de valeurs. <u>Proportionnalité</u> : Exemple d'un tableau qui n'est pas un tableau de proportionnalité, et d'un graphique constitué de points non alignés avec l'origine.
On établit **l'expression algébrique** permettant d'exprimer l'aire du rectangle en fonction de la longueur d'un de ses côtés. On passe à un *calcul instrumenté.*	x étant la mesure en mètres de la longueur d'un des côtés du rectangle (côté choisi avec les élèves), on calcule l'aire A(x) du rectangle après s'être interrogé sur les valeurs que peut prendre x. On introduit le vocabulaire et les notations relatifs aux fonctions. On utilise la calculatrice pour calculer rapidement des images. **On utilise un tableur-grapheur, pour apporter une perception du continu et mettre en évidence l'existence vraisemblable d'un maximum**.	**Passer au cadre algébrique.** **<u>Illustrer la complémentarité des différents cadres.</u>** **Faire émerger :** **- la notion de fonction,** **- … variable,** **- domaine de signification,** **- écriture f(x), $x \mapsto f(x)$** **- image, antécédent**.	Calcul algébrique. Utiliser la calculatrice. Utiliser un tableur-grapheur. Calculer des images à l'aide d'une formule. Lire graphiquement ou sur un tableau des images, des antécédents. *<u>Remarque :</u> La justification de la conjecture pourra être abordée plus tard dans le cadre algébrique, en donnant aux élèves la forme canonique de l'expression de l'aire.*

Questions/Débat