

Atelier A5 : raisonnement et démonstration au collège.

1- Que disent les textes ?

Le préambule des programmes de mathématiques de collège (rentrée 2009) souligne la place essentielle que doit tenir **le raisonnement** dans la formation des élèves et l'initiation très progressive à **la démonstration** qui doit être menée. La place la plus importante est clairement donnée au **raisonnement**, « enjeu principal de la formation mathématique au collège ».

Les deux phases de la **démonstration** sont, comme dans la précédente écriture des programmes, différenciées. Il est explicitement indiqué que « la plus importante est la recherche et la production d'une preuve », sa mise en forme ne devant pas « donner lieu à un formalisme prématuré » mais gagnant à « être travaillée collectivement, avec l'aide du professeur, et à être présentée comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement, aussi bien à l'oral qu'à l'écrit ». C'est la première phase qui permet la validation de compétences du socle.

Les objectifs de la résolution de problèmes, indiqués en tête de chacune des parties du programme de chaque niveau du collège, concernent régulièrement **le raisonnement** et sont déclinés de façon progressive. Les quatre domaines (organisation des données-fonctions, géométrie, nombres et calcul, grandeurs) sont concernés. Dans la partie « géométrie », il est à plusieurs reprises fixé l'objectif de conduire sans formalisme des raisonnements géométriques simples faisant appel à un champ de propriétés qui augmente tout au long de la scolarité au collège.

L'objectif **d'initier les élèves à la démonstration** au travers de la résolution de problèmes apparaît dans la partie « géométrie » en quatrième. Dans cette même partie, l'objectif de développer les capacités relatives à **la formalisation d'une démonstration** apparaît en troisième.

Dans les classes, du point de vue des animateurs de l'atelier :

- une grande importance est donnée à la formalisation des démonstrations dès la cinquième : en classe avec le professeur mais aussi dans les productions attendues des élèves.
- les activités visant explicitement des objectifs de formation des élèves dans le domaine du raisonnement n'occupent pas une place proportionnelle à l'importance reconnue à cette formation par les textes. L'évaluation explicite de l'acquisition de compétences relevant du raisonnement est peu pratiquée.

Choix de la problématique de l'atelier :

Quelles modalités permettent de donner au raisonnement et à la démonstration toute leur place dans la formation des élèves?
Et dans l'évaluation des élèves?

2- Pistes de réponses proposées

- **Développer et diversifier les activités orales :**

L'interactivité entre élèves et enseignant qu'elles autorisent permet de mettre en évidence et valoriser des capacités des élèves, en termes de raisonnement, qui n'apparaissent pas nécessairement à l'écrit (on peut faire préciser les arguments implicites, clarifier les passages obscurs). Elle permet aussi d'identifier l'origine de certaines des erreurs commises et de travailler à leur remédiation.

Les élèves doivent **être en confiance** pour que des pratiques orales propices au raisonnement puissent être envisagées : une ambiance de classe adéquate doit être préalablement installée ; la qualité de la sollicitation et de l'écoute du professeur est importante. Installer, en sixième et cinquième, l'habitude de ce type de travail doit permettre de le poursuivre avec les plus grands.

Réciproquement, des activités orales bien menées permettent de **donner confiance** aux élèves en leurs capacités à argumenter et raisonner.

Quelques exemples d'activités menées à l'oral et suscitant le raisonnement ont été évoqués durant l'atelier :

- *la pratique régulière de l'interrogation orale d'un élève par ses camarades en début de séance pour habituer les élèves à s'exprimer,*
- *l'utilisation par les élèves de transparents pour présenter la solution apportée à un exercice préparé à la maison ou cherché en classe : dégagé de toute obligation d'écrire, l'élève prend inévitablement un peu de recul par rapport à son travail et s'exprime ; moyennant quelques précautions (choix de l'exercice, vérification préalable de la solution par le professeur) les élèves timides, qui n'interviennent généralement pas en classe, peuvent être sollicités ainsi..*

- la pratique régulière d'activités mentales (par exemple: calcul mental réfléchi, mise en place de figures clés, établissement de conjectures à partir d'une figure donnée, interprétation d'un graphique, analyse d'un tableau de données ...): la phase de correction amène les élèves à s'exprimer et à expliciter leur démarche.

- le renvoi à la classe des questions ou propositions des élèves, la mise en débat.

- Développer certaines pratiques :

. Proposer des activités d'étude et de recherche ou de réinvestissement mises en place de façon suffisamment ouverte. Eviter les « activités » comportant de nombreuses questions et sous-questions et qui, de ce fait, ne suscitent pas le raisonnement des élèves. Eviter les activités consistant à remplir les « trous » d'un texte.

. Proposer des activités permettant l'expérimentation. Reconnaître, dans ce cadre, la valeur des mesures, des essais, tout en ayant l'objectif et l'ambition d'amener les élèves à aller au-delà.

. Soumettre occasionnellement aux élèves des problèmes ouverts ou des problèmes sans questions. Se poser des questions est la première étape du raisonnement. En classe, en présence du professeur, il est possible de mettre l'élève en situation de se poser des questions. Peut-être n'exploite-t-on pas assez cette possibilité.

. La narration de recherche.

. Les exercices de type vrai/faux avec justification, les QCM (notamment pour le débat accompagnant leur correction), la production de contre exemples ...

- Et bien sûr, **donner toute sa place à la première phase du travail de démonstration** (recherche et production d'une preuve), la séparer nettement de la phase de mise en forme.

- Pour quels effets ?

- Redonner confiance en eux aux élèves
- Les habituer à chercher, mettre progressivement en place une méthodologie de recherche
- Motiver les efforts demandés à l'écrit pour communiquer sa recherche et la faire comprendre aux autres, donner ainsi du sens, aux yeux des élèves, à un certain formalisme favorisant la communication écrite d'une démarche.
- Remotiver l'enseignant en l'amenant à identifier différents niveaux d'objectifs des activités et problèmes qu'il propose et donc à prendre conscience plus fréquemment des capacités de ses élèves et des effets positifs de son action.

3 – Quatre exemples d'expériences vécues avec des classes ont été présentés lors de l'atelier.

On trouvera les diaporamas correspondants.

Exemple 1 : réponses écrites d'élèves de cinquième à la question « La somme de deux multiples de sept est un multiple de sept. Vrai ou faux ? »

Les élèves concernés étaient habitués à argumenter à l'oral. La qualité, en termes de communication, de certaines des productions écrites figurant dans le diaporama est sans doute liée à ce travail préalable.

L'analyse de productions d'élèves montre que les démarches explicitées, justes ou fausses, contiennent des informations et reflètent des qualités identifiables par le professeur.

Elle met aussi en évidence que des réponses de nature différente (avec ou sans recours au calcul littéral, ici) peuvent être considérées comme totalement satisfaisantes.

L'absence, dans certaines productions, d'étapes aboutissant à la trace écrite communiquée pose **la question des places respectives du brouillon et de l'écrit de communication dans ce type de travail**. Les élèves, notamment en 5^e, sont-ils capables de faire le tri nécessaire pour ne pas remettre une copie qui soit un brouillon mais ne pas, non plus, inscrire sur sa copie uniquement les solutions abouties ?

Par ailleurs, les réactions des participants à l'atelier ont montré que, si reconnaître les qualités de réponses partielles semble accepté, reconnaître une valeur à des écrits objectivement faux (voir la production de Thomas dans le diaporama) ne fait pas l'unanimité.

Exemple 2 (Le cercle): première recherche en classe d'un problème ouvert, en troisième, en ZEP ; essai d'évaluation des compétences du socle relevant de la résolution de problèmes mises en jeu.

Cet exemple a été proposé

- pour faire réagir les participants aux consignes (aux autorisations !) qu'a été amené à donner le professeur et aux réactions des élèves à ces consignes montrant à quel point les élèves se censurent par rapport aux essais, à l'utilisation des instruments, aux prises d'initiatives : pourquoi ? comment l'éviter ?

- pour donner un exemple, ne se voulant pas modélisant, de grille d'évaluation permettant de valoriser des productions mêmes inabouties, voire peu avancées, des élèves.

La discussion lors de l'atelier a notamment porté

- sur la transformation en note chiffrée de l'évaluation des compétences permise par la grille adoptée : elle est effectivement réductrice mais correspondait à une attente formulée par les élèves (voir le diaporama) et à des habitudes encore très présentes chez les différents acteurs,
- sur l'intérêt de faire vivre des productions écrites non associées à une évaluation numérique : une fois le principe accepté, les élèves produisent davantage et plus librement,
- sur les repères, en termes de niveau de preuve, qu'il convient de donner aux élèves.

Exemple 3 (La corde) : il s'agit d'un court problème ouvert donné en devoir à la maison en quatrième.

L'exemple a été proposé pour évoquer avec les participants de l'atelier **l'évolution du professeur, dans le domaine de l'évaluation, que génère la décision de travailler sur les compétences des élèves relevant de la recherche et du raisonnement.**

Dans les productions des élèves, apparaissent différents niveaux de raisonnement : un raisonnement faux clairement explicite, un raisonnement faux suivi d'un schéma qui aurait pu permettre de le réfuter mais n'a pas été exploité, trois raisonnements justes expliqués de façon personnelle. On note en particulier que, dans le cadre de liberté associé à la forme du problème et à la nature des attentes du professeur, les élèves utilisant le théorème de Pythagore pour calculer la hauteur du triangle isocèle auquel ils se réfèrent ne se sentent pas obligés de rédiger de façon formelle.

Du point de vue des animateurs de l'atelier, les productions des élèves figurant en diapositives 7, 8 et 9 constituent des raisonnements aboutis et leurs réponses au problème posé sont démontrées. Cela a été débattu en atelier, certains pensant qu'il n'y avait pas dans les productions montrées de raisonnements aboutis, de réponses démontrées.

Exemple 4 (Une distance minimale) : il s'agit d'un travail de groupe ; les attentes et les éléments évalués sont explicités. Les productions des groupes se rapprochent **d'une narration de recherche** : les hypothèses faites, mêmes celles reconnues ensuite comme fausses par les élèves, sont mentionnées (diapositives 4 et 5) ; les étapes de la recherche effectuée sont détaillées (diapositives 6 et 7) ; la mise en forme déductive proposée après la recherche (diapositive 8) est rédigée librement, sans formalisme, et semble tout à fait satisfaisante aux animateurs de l'atelier qui estiment qu'elle constitue une démonstration de la réponse apportée au problème.

L'exemple a été montré en atelier pour discuter

- de la valeur, en termes de méthode, de la démarche consistant à émettre une hypothèse erronée, à s'en rendre compte et à expliquer en quoi elle est fausse,
- de la possibilité pour des élèves de raisonner très correctement de façon déductive, y compris en géométrie, sans se placer dans un cadre de rédaction formalisé.

4- Autres questions soulevées, autres points de vue exprimés, au cours de l'atelier ou de sa préparation

Raisonner est utile et indispensable dans la vie quotidienne. Démontrer ne l'est pas.

Raisonner, ce n'est pas tendre vers une conjecture.

Quel lien entre argumentation et démonstration ? Points de vue contrastés des participants.

Il y a un raisonnement sous-jacent aux calculs, qu'on explicite en général peu.

Suivant que l'on demande « Calculer... » ou « Montrer que les expressions ... et ... sont égales », on place plus ou moins l'élève en situation de raisonner.

Les démonstrations de géométrie faites en classe aboutissent souvent à une formalisation déductive identifiant données, propriété utilisée, conclusion (« On sait que... Or ... Donc »).

L'utilité, pour la formation intellectuelle des élèves, de cette formalisation réalisée avec le professeur n'est pas remise en cause mais des questions se posent :

- Pourquoi la nécessité de cette formalisation est-elle très majoritairement associée aux démonstrations de géométrie et pas aux démonstrations relevant du domaine numérique (par exemple la démonstration en 5^e de $ac/bc = a/b$ ou celle, en 3^e, concernant la racine d'un produit) ?
- Comment faire cohabiter cette formalisation, utile à la formation des élèves, et des attentes plus souples portant sur les réponses apportées par les élèves à des questions du type « Démontrer que... », notamment dans le domaine de la géométrie ?

Lorsque la question posée est fermée (« Démontrer que ... »), une production exacte et rédigée de façon standard est souvent implicitement attendue. Est-ce une fatalité ?

Face à des questions formulées de façon plus ouverte, il semble plus facile d'accepter différentes démarches et de mettre en œuvre une évaluation des compétences mobilisées.

Lors des évaluations sommatives, on encourage les élèves (à tort ou à raison) à chercher au brouillon et à mettre au propre sur la copie. Pour évaluer à l'écrit le raisonnement, il faudrait engager les élèves à écrire sur leur copie leur démarche, même non aboutie. Comment un élève peut-il faire face à cette dualité d'exigences ? Peut-on aller jusqu'à identifier, comme dans les épreuves récentes du baccalauréat, certaines questions d'un devoir ou d'un sujet d'examen en indiquant dans l'énoncé que les traces de recherche, même infructueuses, seront prises en compte?