Fonctions numériques et applications

<u>Exemple d'activité pour les élèves construite à partir de l'application **« Coût de production, chiffre d'affaires, résultat d'exploitation »** proposée dans la partie « Approfondissements pour le professeur » du document d'accompagnement .</u>

<u>Partie I : trois approches du coût marginal de rang q.</u>

Enoncé	Document d'accompagnement (extraits)
<u>1ère approche(début classe de première).</u> Dans une usine de produits chimiques , on étudie : - la fonction **coût total** de fabrication C, exprimé en milliers d'euros, d'une quantité q de solvant exprimée en kg et variant de 0 à 600. Ce coût total est donné par : $C(q) = 0{,}01q^2 + 2q + 500$. - le coût de la dernière unité produite. Pour la quantité q , cet accroissement est le **coût marginal de rang q :** $C_m(q) = C(q) - C(q-1)$. On réalise l'étude sur tableur (on peut le remplacer par la calculatrice) : - afficher les valeurs de q avec un pas de 50 , de C(q) et de $C_m(q)$ - Représenter graphiquement la fonction C. 1) Quels sont les **coûts fixes**, quelle que soit la quantité produite? Quelle interprétation économique peut-on en donner ? 2) a) Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de la fonction coût total C ? b) Montrer que $C(q) = 0{,}01(q + 100)^2 + 400$, démontrer alors le sens de variation de C. c) Quelle interprétation économique peut-on en donner ? 3) Comment lire le coût marginal de rang donné q à l'aide de la courbe représentant le coût total ? Quelle est la difficulté rencontrée ?	Pour exploiter le modèle donné pour « coût de production, chiffre d'affaires, résultat d'exploitation » en première : « …on peut envisager pour f une fonction polynôme du second degré $q \to aq^2 + bq + c$, il est impératif que les trois nombres a, b, c …soient strictement positifs : les deux premiers pour que f soit croissante sur $[0 ; +\infty[$, le troisième pour que $f(0) > 0$. » « On demande d'étudier la fonction f à l'aide du tableur, c'est à dire : - d'afficher au tableur les valeurs de q et de f(q)… - de représenter la fonction f au tableur - de conjecturer puis de démontrer son sens de variation, et de l'interpréter en termes économiques… » le tableur peut être remplacé par la calculatrice…choix de la fenêtre.. « l'interprétation économique doit éclairer le raisonnement algébrique : si $q_2 > q_1$ alors pour produire q_2 il a déjà fallu produire q_1 donc le coût de production de q_2 est nécessairement supérieur ou égal à celui de q_1. » « Dans certains énoncés, on exprime les quantités en milliers ou les coûts en milliers (ou millions) pour être en phase avec la réalité économique. Néanmoins, cette pratique rend plus difficile l'interprétation du coût marginal… » « Le choix d'écrire d'emblée f (q)…permet d'éviter les périphrases définissant les fonctions f…et de se placer dans l'environnement familier du cours de mathématiques…Mais il faut reconnaître que cela court-circuite un des objectifs de l'apprentissage : savoir passer de formules telles que CT = q² + 3600…à des écritures fonctionnelles ».
<u>2ème approche (point central de la partie fonction du programme de première).</u> A partir de la courbe représentant la fonction coût total C obtenue pour q dans [0 ; 600] dans un repère d'origine O, on opère un zoom centré en 300. 1) a) Quelle semble être la représentation de la fonction coût total entre 295 et 305 ? b) Calculer le coût marginal de rang 300 tel qu'il est défini dans la 1ère approche, puis pour chaque quantité de 296 à 305. c) Calculer le nombre dérivé de C en 300 : C'(300). 2) Interpréter les résultats du 1). 3) Graphiquement, que représente le coût marginal de rang q ?	l'interprétation du coût marginal par les économistes « revient à identifier $f'(q)$ à $f(q + 1) - f(q)$ ou à $f(q) - f(q - 1)$. Cette approximation est justifiée si q est assez grand et f assez régulière : elle consiste alors à identifier localement le graphe de f avec sa tangente. »
<u>3ème approche (terminale).</u> 0n peut : - utiliser une fonction exponentielle $C(q) = C_0e^{aq}$ avec a> 0, y compris pour la partie II. -utiliser le calcul différentiel avec une plus grande dextérité algébrique. - Démontrer certains résultats admis en première.	« On peut aussi envisager une fonction de la forme $f(q) = q^3 + b$. Le coût moyen minimal est obtenu quand $q = \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$: cela permet de réinvestir l'exposant $\frac{1}{3}$ .. » « Cas d'un monopole (terminale)… »

Partie II :

A) Coût moyen unitaire : détermination graphique et lien entre le coût moyen unitaire et le coût marginal.(Dès la première)

Enoncé	Document d 'accompagnement (extraits)
Le **coût moyen unitaire** est le quotient du coût total de la production d'une quantité q par q : $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. 1)a) Exprimer $C_M(q)$ en fonction de q. b) Afficher les valeurs de $C_M(q)$ avec le tableur (compléter le tableau de la partie I). 2) M étant le point d'abscisse q de la courbe C_C représentant le coût total, quel est le lien entre le coût moyen unitaire $C_M(q)$ et la droite (OM) ? 3) a) Déterminer l'abscisse du point de C_C pour le lequel la tangente passe par O. b) En utilisant les sécantes (OM) correspondant à différentes valeurs de q, expliquer comment retrouver graphiquement avec la courbe C_C la production q_0 qui minimise le coût moyen unitaire. c) Quelle interprétation économique peut-on en donner ? 4) Comparer le coût moyen $C_M(q_0)$ et le coût marginal de rang q_0 $C_m(q_0)$. Quelle conjecture pouvez-vous émettre ?	« On demande d'étudier le coût moyen unitaire $g(q) = \dfrac{f(q)}{q}$, c'est à dire : - de faire apparaître en $3^{ème}$ colonne le coût moyen unitaire - d'interpréter g(q) comme le coefficient directeur de la droite (OM), où M est le point d'abscisse q sur la courbe de f - d'en déduire graphiquement le coût moyen minimal. » Cette partie permet « …de distinguer sécante et tangente, et donne de leur coefficient directeur une interprétation économique simple, qui a un enjeu :la rentabilité de l'entreprise. La fin…montre pourquoi, quant le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal. »

B) Chiffre d'affaires (expression à préférer à recette) et résultat d'exploitation (expression à préférer à bénéfice). (Dès la première)

Enoncé	Document d'accompagnement (extraits)
On suppose que toute la production est vendue au prix de vente unitaire de 8milliers d'euros. 1) a) Exprimer le **chiffre d'affaires total** R(q) en fonction de q. b) Afficher les valeurs de R(q) avec le tableur (compléter le tableau précédent). c) Quelle est la nature de la fonction chiffre d'affaires ? d) Quelle interprétation économique peut-on en donner ? 2) On définit le **résultat d'exploitation** par P(q) = R(q) – C(q). a) Afficher les résultats de P(q) avec le tableur. b) Montrer que P(q) = – 0,01(q – 100) (q – 500). c) Résoudre l'équation P (q) = 0 dans [0 ; 600]. d) Dresser le tableau de signes de P(q) sur [0 ; 600]. e) Quelle interprétation économique peut-on donner des résultats 2)b) et 2c)? Donner **l'intervalle de rentabilité** dans lequel le résultat d'exploitation est positif (c'est alors un **profit**). 2) Représenter graphiquement les fonctions coût, chiffre d'affaires et résultat d'exploitation sur un même graphique et retrouver graphiquement les résultats du 2). 3) En étudiant graphiquement l'évolution du coût moyen par rapport au prix de vente unitaire, retrouver l'intervalle de rentabilité. (On compare les coefficients directeurs $\dfrac{C(q)}{q}$ et p).	« On donne le prix de vente unitaire (supérieur au coût moyen minimal), et on demande : - de faire apparaître en $4^{ème}$ colonne le chiffre d'affaire - de refaire un graphique comportant les graphes de f et du chiffre d'affaires dans le même repère - de comparer, le chiffre d'affaires et le coût total de production, numériquement, graphiquement et économiquement. » « On définit le résultat d'exploitation h….On demande : - de faire apparaître en $5^{ème}$ colonne le résultat d'exploitation ; de représenter la fonction h.. » « …c'est l'occasion de rappeler une méthode souvent efficace pour comparer deux nombres (ici la recette totale et le coût total) : former leur différence et étudier son signe. Si h(q) est positif c'est un profit, s'il est négatif c'est une perte. » « …on obtient ainsi l'intervalle de rentabilité, dans lequel le résultat d'exploitation est positif (c'est alors un profit). »

C) Profit maximal.(Dès la première)

Enoncé	Document d'accompagnement (extraits)
1) A l'aide du graphique conjecturer la quantité q_{max} à produire pour réaliser un **profit maximal**. 2) Montrer que $P(q) = –0,01(q –300)^2 + 400$ pour q dans [0 ; 600] en déduire la valeur de q_{max}. 3) a) Comparer le coût marginal de rang q_{max} : $C_m(q_{max})$ et le prix de vente unitaire p. b)Quelle interprétation graphique peut-on en donner ? c)Quelle interprétation économique peut-on en donner ? 4) Le coût moyen unitaire et le profit maximal sont-ils atteints pour la même production q ?	« Pour maximiser h, il se peut que le pas choisi pour des valeurs de q ne soit pas assez fin : on ressent ainsi les limites de l'exploration numérique et donc la nécessité d'une méthode plus performante. Mais on peut aussi tabuler plus fin. On peut aussi guider un raisonnement algébrique fondé sur la forme canonique. On peut faire remarquer qu'au point obtenu la tangente est parallèle à la droite qui représente le chiffre d'affaires… On peut observer que ce n'est pas quand le coût moyen est minimal que le profit est maximal… »