MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

académie Toulouse
RÉGION ACADÉMIQUE OCCITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Académie de TOULOUSE
et
Agence pour l'enseignement français à l'étranger – zone ibérique

Olympiades académiques de mathématiques

Session 2019
Classes de Première
Mercredi 13 mars de 10 heures 10 à 12 heures 10

EXERCICES PROPOSES PAR l'ACADEMIE

Avertissement :

• *Le sujet comporte sept pages (cinq numérotées de 1 à 5 et deux pages annexes). Il est composé d'énoncés dédiés à deux types de candidates ou candidats : ceux élèves dans la série S. d'une part, ceux élèves dans les séries autres que S. d'autre part.*

• *Les candidates ou candidats élèves des séries autres que S. doivent traiter l'exercice 1 (« Un petit concours ») et l'exercice 2 (« Dans la ruche »).*

• *Les candidates ou candidats élèves de la série S. doivent traiter l'exercice 2 (« Dans la ruche ») et l'exercice 3 (« Attaque du train postal »). L'exercice 3 comporte deux pages annexes (à remettre avec la copie) pour la réalisation de figures.*

• *Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.*

• *Très important : <u>veiller à informer précisément les entêtes, numéros de pages et nombre de pages sur chaque copie remise</u>.*

• *Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.*

Et partenaires de l'Académie de Toulouse: Région, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes, Institut de Mathématiques de Toulouse, Département de Mathématiques, Institut National des Sciences Appliquées, Ecole Normale Supérieure de Paris, Palais de la Découverte, Ecole Nationale de l'Aviation Civile, Université Paul Sabatier, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Ecole d'Economie de Toulouse, Délégation régionale CNRS, Observatoire Midi-Pyrénées, Toulouse School of Economics-Research, Archives Municipales de Toulouse, Centre National d'Etudes Spatiales, Cité de l'Espace, Science Animation, Société des Ingénieurs et Scientifiques de France – délégation Occitanie, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Association *femmes et mathématiques*.

Exercice 1 (candidates ou candidats élèves des séries autres que la série S.)
« Un petit concours »

Dans un collège on organise un petit concours sous forme de QCM. L'épreuve dure 1 h 15 min. Il y a 30 questions réparties en 3 groupes : les questions « faciles » notées F_1, F_2, F_3, …, F_{10}, les questions « moyennes » notées M_{11}, M_{12} , M_{13} , …, M_{20} et les questions « difficiles » notées D_{21} , D_{22} , D_{23} , …, D_{30}.
Une réponse correcte à une question rapporte 3 points si la question est « facile », 4 points si la question est « moyenne » et 5 points si la question est « difficile ». Une question laissée sans réponse ou à réponse erronée ne pénalise pas.
Dans les questions suivantes, on étudie diverses stratégies d'élèves participant à ce concours. Les quatre questions sont indépendantes.

1- La stratégie de Caroline

Caroline a pris 5 minutes pour se relire. Elle a passé deux fois plus de temps sur les questions moyennes que sur les questions faciles et deux fois plus de temps sur les questions difficiles que sur les questions moyennes. Combien a-t-elle passé de temps sur les questions moyennes ?

2- La stratégie de Jean

Jean n'a voulu répondre qu'aux questions moyennes et difficiles.
Il a répondu juste à 18 questions et s'est trompé sur 2.
a) Quels sont les scores possibles de Jean ?

On veut calculer la probabilité que le score de Jean soit supérieur ou égal à 81 points.
b) On suppose dans cette question que les deux erreurs sont commises sur une question moyenne et une question difficile. i étant un nombre entier compris entre 11 et 20 et j un nombre entier compris entre 21 et 30, on note ces deux questions M_i et D_j . Combien y a-t-il de couples $(M_i; D_j)$ possibles ?
c) On suppose dans cette question que les deux erreurs sont commises sur deux questions moyennes. i et j étant des nombres entiers compris entre 11 et 20, avec $i < j$, on note ces deux questions M_i et M_j.
Combien y a-t-il de couples $(M_i; M_j)$ possibles ?
d) Conclure en donnant la probabilité que le score de Jean soit supérieur ou égal à 81 points.

3- La stratégie d'Olivier

Olivier passe 2 minutes pour répondre à une question facile, 4 minutes pour une question moyenne et 6 minutes pour une question difficile.
Ses réponses sont toujours correctes et il prend le moins possible de temps pour se relire.
a) Calculer les rapports « points gagnés / nombre de minutes passées » pour chaque type de question.
b) Quel est le score le plus élevé possible que peut obtenir Olivier ? Expliquer.

4 - La préparation de Faustine

Pour préparer le concours, Faustine a fait le concours de l'année précédente. Elle a passé exactement 3 minutes par question et il lui est resté 3 minutes pour se relire.
a) A combien de questions Faustine a-t-elle répondu ?
b) Faustine analyse sa performance lors de cet entrainement. Elle se rend compte que :
- elle a obtenu 60 points ;
- elle a répondu à des questions de chaque type ;
- le nombre de questions faciles auxquelles elle a répondu est un multiple de 5 ; le nombre de questions moyennes auxquelles elle a répondu est un multiple de 3 ; le nombre de questions difficiles auxquelles elle a répondu est un multiple de 2 ;
- la proportion des questions faciles traitées auxquelles elle a bien répondu est de 4/5 ; la proportion des questions moyennes traitées auxquelles elle a bien répondu est de 2/3 ; la proportion des questions difficiles traitées auxquelles elle a bien répondu est de 1/2.
A combien de questions de chaque catégorie (faciles, moyennes, difficiles) a-t-elle répondu ?

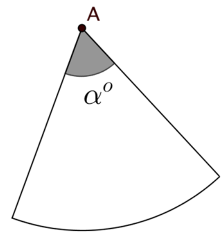
Exercice 2 (commun à tous les candidats) « Dans la ruche »

Le but de cet exercice est d'étudier le procédé de construction qu'utilisent les abeilles pour réaliser leurs alvéoles.

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

<u>Partie A :</u> Questions de recouvrements

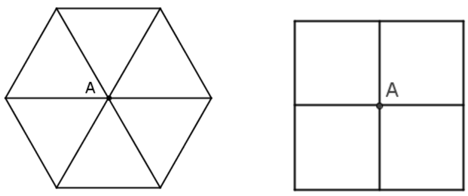
1) On considère un point A et un nombre réel positif α.
On cherche pour quelles valeurs de α il est possible d'accoler des secteurs angulaires de sommet A et d'angle de mesure α° (α degrés) de sorte à faire, sans chevauchement, le tour complet du point A.



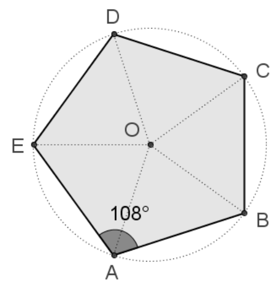
   a) Est-ce possible si $\alpha = 45°$? Et si $\alpha = 50°$? Justifier.
   b) Donner un exemple de valeur non entière de α telle que ce soit possible. Justifier.
   c) Cas général : à quelle condition sur le réel positif α est-ce possible ?

On considère, dans la suite de cette partie, un polygone régulier à n côtés, avec n entier supérieur ou égal à 3.
On note *a* la longueur commune des côtés de ce polygone, O son centre et A un de ses sommets.

On se demande s'il est possible d'accoler par le sommet A plusieurs polygones réguliers identiques (n côtés de longueur *a*) de sorte à faire, sans chevauchement, le tour complet du point A.
Cela est possible dans les cas $n = 3$ et $n = 4$ comme l'illustrent les figures ci-dessous.



2) Cas $n = 5$

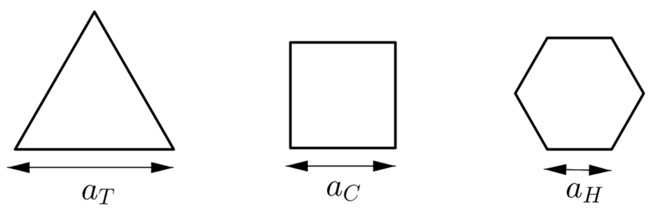


   a) Montrer que l'angle formé par deux côtés consécutifs d'un pentagone régulier a pour mesure 108°.
   b) En déduire si on peut ou non accoler par un sommet A des pentagones réguliers identiques de sorte à faire, sans chevauchement, le tour complet du point A.

3) Cas général
   a) Montrer qu'on peut accoler par le sommet A plusieurs polygones réguliers identiques à n sommets si, et seulement si, $\frac{360}{180-\frac{360}{n}}$ est un nombre entier.
   b) Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ tels que $\frac{360}{180-\frac{360}{n}}$ soit un nombre entier.
   c) Conclure.

<u>Partie B :</u> Polygone avantageux

1) On s'intéresse à trois polygones réguliers, un triangle équilatéral, un carré et un hexagone régulier, dont l'aire est égale à 0,24 cm². On désigne respectivement par a_T, a_C, a_H les longueurs, exprimées en cm, des côtés de ces polygones respectifs.

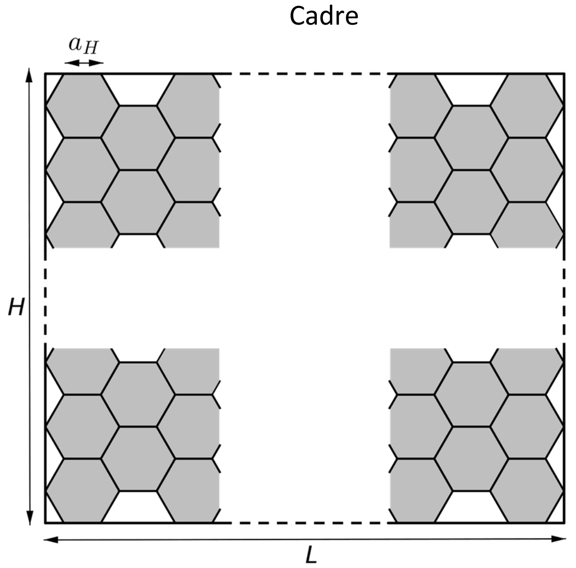


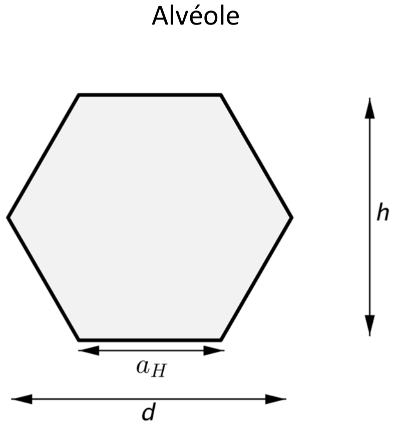
   a) Montrer que les hauteurs du triangle équilatéral ont pour longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}a_T$ puis que $a_T = \sqrt{\frac{0,96}{\sqrt{3}}}$.
   b) Calculer a_C et a_H.

2) Dans une ruche, la plupart des alvéoles servent à stocker le pollen et le miel et les autres accueillent les jeunes abeilles jusqu'à ce qu'elles deviennent adultes. Leurs côtés sont construits en cire, l'intérieur sert pour le stockage.
En première approche, l'observation conduit à modéliser la forme des alvéoles construites par les abeilles par un prisme droit dont la base est un hexagone régulier d'aire 0,24 cm².
Quels avantages offre, pour les abeilles, la construction d'alvéoles de cette forme ? Justifier.

<u>Partie C :</u> Dans la réalité d'un cadre

L'apiculteur dispose dans la ruche des cadres en bois verticaux rectangulaires que les abeilles « pavent » par un très grand nombre d'alvéoles. On modélise à nouveau chaque alvéole par un prisme droit dont la base est un hexagone régulier d'aire 0,24 cm².





Les zones non grisées sur les bords du cadre sont les « surfaces inutilisées ». Les côtés d'alvéoles situés sur les bords horizontaux du cadre ne sont pas construits en cire par les abeilles.
On considère les données numériques suivantes (très proches de la réalité) :

L = 42 cm ; H = 27,03 cm ; d = 0,6 cm ; h = 0,53 cm ; a_H= 0,3 cm.

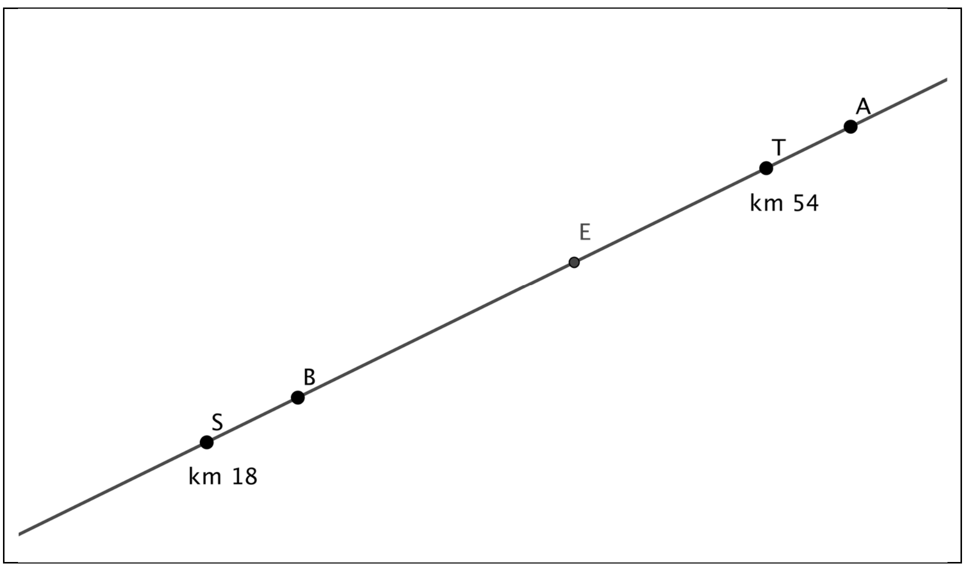
1) Calculer le nombre d'alvéoles utilisables portées par un cadre.
2) En dénombrant les cloisons construites en cire (côtés des hexagones sans tenir compte des côtés situés sur le cadre) on obtient 14284**.**
   On note Q la mesure en cm de la longueur totale des cloisons construites par les abeilles et S la mesure en cm² de l'aire totale des bases des alvéoles utilisables.
   Démontrer que le rapport $\frac{S}{Q}$ est proche de 0,26.
3) Pour une alvéole on a : $\dfrac{\text{aire}}{\text{périmètre}} \approx \dfrac{0{,}24}{6\times 0{,}3}$ soit environ 0,133.
   On constate que le rapport $\frac{S}{Q}$ est proche du double de ce rapport et même légèrement inférieur.
   Comment aurait-on pu le prévoir sans calcul ? *On pourra s'aider de la figure représentant le cadre.*

Exercice 3 (candidates ou candidats élèves en série S.) « Attaque du train postal »

Sur la ligne de chemin de fer en direction de l'Ouest, se trouve une portion parfaitement rectiligne. Lucky Luke, le cow-boy solitaire, a appris que les Dalton devaient attaquer au kilomètre 9 le train postal qui emprunte cette liaison.

Il ne dispose malheureusement que d'un fragment de carte en mauvais état où figurent :
- l'emplacement des gares de Alphaville (point A) et de Betaville (point B) ;
- l'emplacement de la réserve d'eau pour les machines à vapeur (point E) qui est à égale distance des gares Alphaville et Betaville ;
- le kilomètre 18, noté S, et le kilomètre 54, noté T, de la ligne.

Voici ce qu'il voit sur ce fragment.



Partie A : Recherche du lieu de l'attaque à la règle non graduée et au compas.

En fouillant son sac, Lucky Luke trouve un compas rouillé et une vieille règle dont les graduations sont effacées. Pour repérer le lieu de l'attaque, il se propose de construire la médiatrice du segment [ST].

1) Rappeler la méthode de construction de la médiatrice d'un segment quelconque [KM] **à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée.** Effectuer cette construction sur la copie.
Désormais, on ne décrira plus la construction d'une médiatrice.

2) En traçant l'intersection de la médiatrice du segment [ST] et de la droite (AB), quel est le kilomètre repéré ?

3) En effectuant des constructions à la règle non graduée et au compas, expliquer comment construire le point où le train postal va être attaqué. Réaliser la construction **sur le document 1 donné en annexe.**

Partie B : Le compas est cassé....

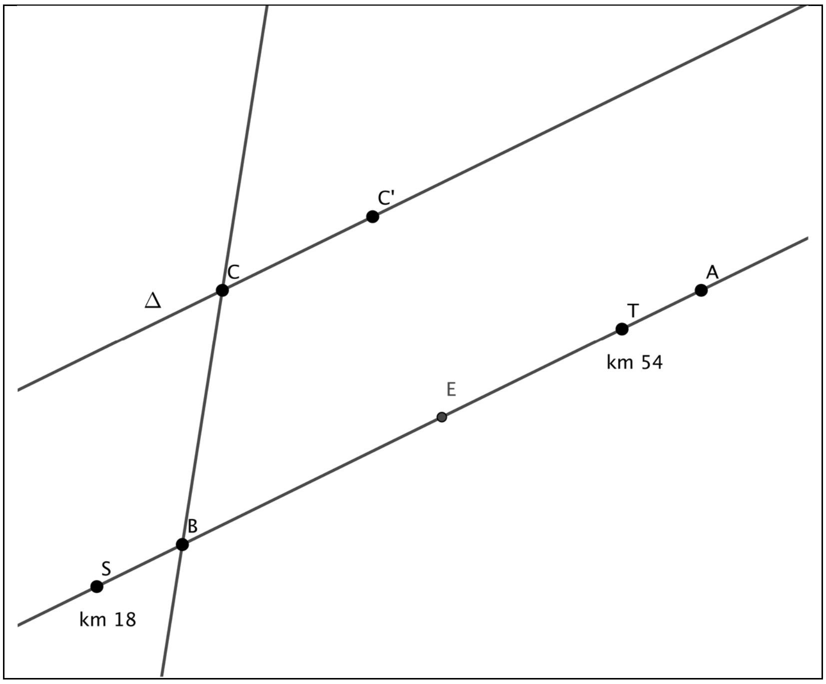
Lucky commence sa construction. Malheureusement, son compas, ancien, se brise très vite et il ne dispose plus que de sa règle non graduée.
Lucky se souvient que le point E est le milieu du segment [AB] et se rappelle d'un théorème de géométrie :
« Dans tout triangle non aplati PQR, si on note M le milieu du segment [QR], K un point du segment [PM], distinct de P et de M, J le point d'intersection de la droite (RK) et du segment [PQ], I le point d'intersection de la droite (QK) et du segment [PR], on a : la droite (IJ) est parallèle à la droite (QR). »

1) Lucky a choisi un point F n'appartenant pas à la droite (AB) et un point C appartenant au segment [FB], distinct de F et de B, il a construit la droite parallèle à (AB) passant par C avec sa seule règle non graduée.

Comment a-t-il fait ? Réaliser la construction **sur le document 2 donné en annexe**.

2) Lucky a réussi la construction de la droite Δ parallèle à (AB) et passant par C.
Il place C', un point de la droite Δ distinct du point C, plus proche de C que A ne l'est de B.
Il parvient à construire à la règle seule le milieu I du segment [CC'].

Expliquer sa construction en la justifiant. Faire apparaître les tracés **sur le document 3 donné en annexe.**



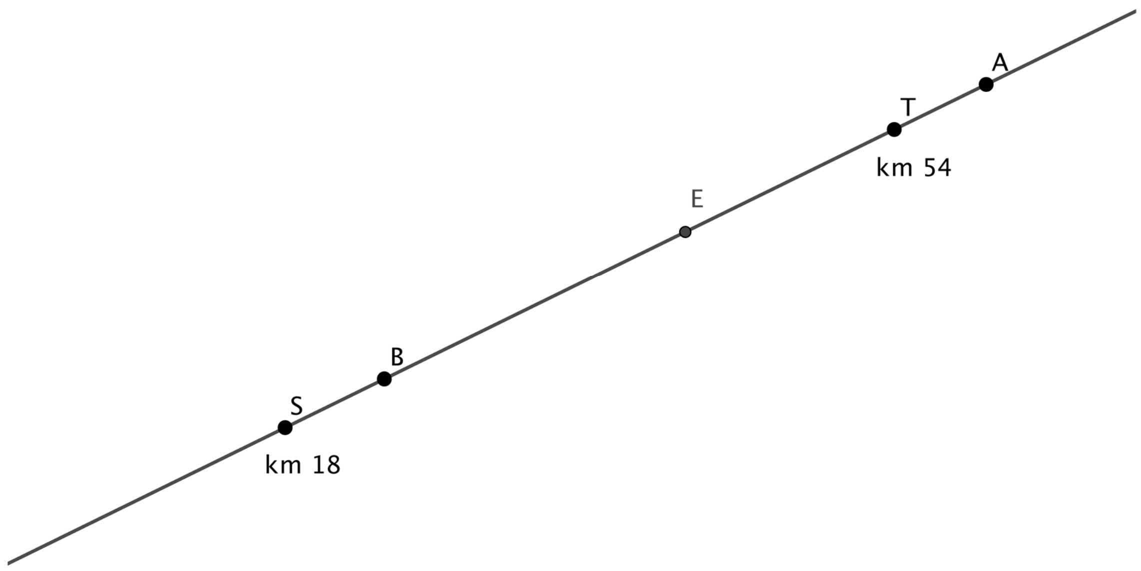
3) Les efforts de Lucky lui permettent alors de construire le kilomètre 36.
Réaliser**, à l'aide uniquement de la règle non graduée**, la construction du point qui représente le km 36 **sur le document 4 donné en annexe**, sur lequel le milieu I du segment [CC'] est déjà représenté.
Décrire la construction réalisée et justifier qu'elle donne bien le point cherché.

4) Lucky s'écrie alors « EUREKA ! Je sais comment faire ….».
Réaliser**, à l'aide uniquement de la règle non graduée**, la construction du point où le train postal va être attaqué en complétant **le document 4**. Décrire la construction réalisée et justifier qu'elle donne bien le point cherché.

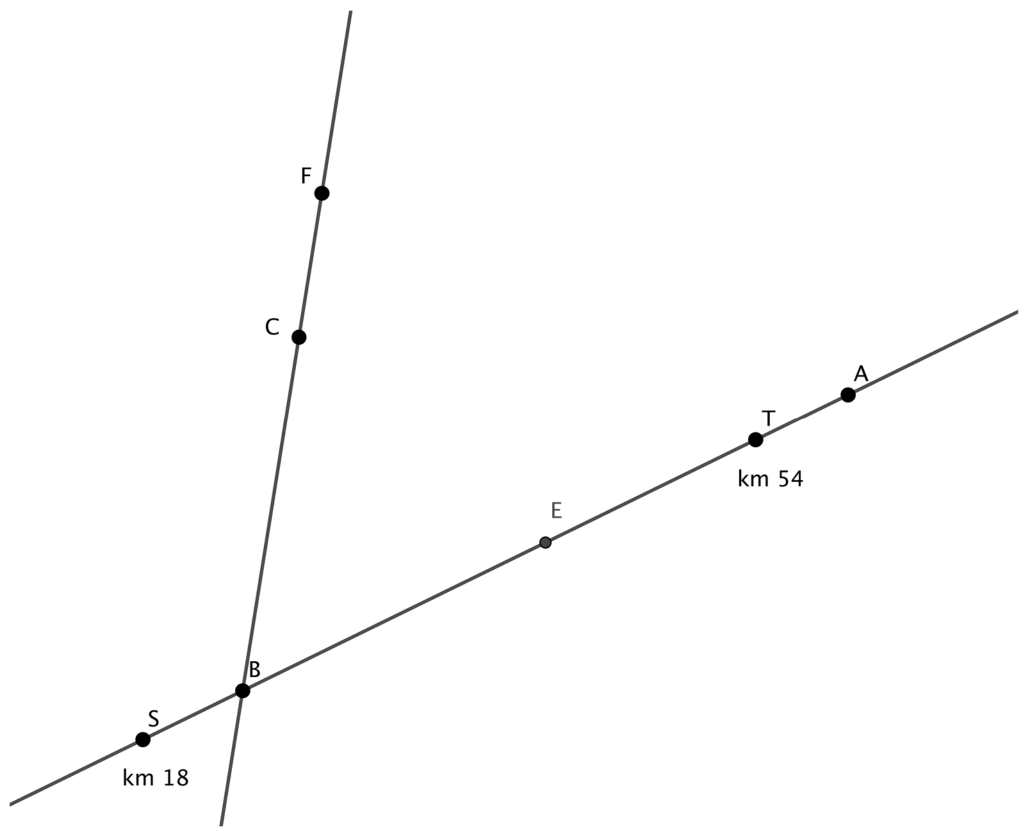
5) Rantanplan, le chien fidèle, se dit : « Il est heureux que Lucky ait choisi C' comme il l'a fait ! Avec un autre choix aurait-il pu effectuer cette construction à la règle seule ? ».
Pourquoi ce commentaire de Rantanplan ?
La construction à la règle seule du point représentant le kilomètre 9 est-elle possible pour tout choix du point C' sur la droite Δ (C' distinct de C) ?

A remettre avec la copie NOM et Prénom : ………………………… Date de naissance : …./…./……. page …. /….

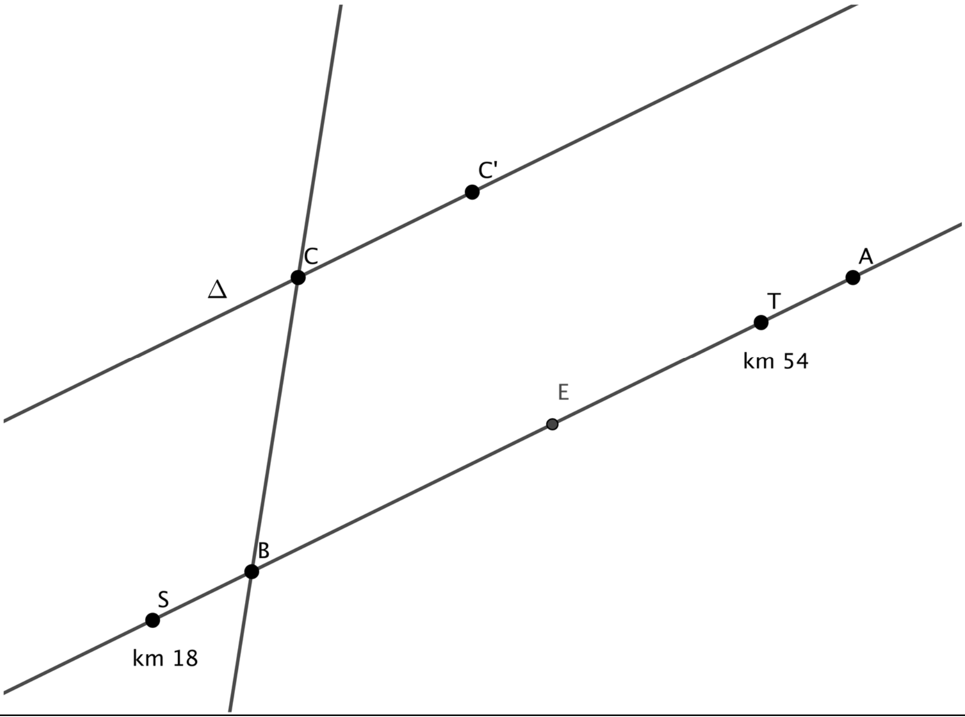
Document 1



Document 2



Document 3



Document 4