Distance d'un point à une courbe

Activité en amont :	
Activités mentale de début d'heure : 2, 3 calculs de dérivée.	Exercice d'optimisation : -La boite à coin carré. -Autour de f(x)=0 (acte 1)

Compétence(s) calculatoire(s) travaillée(s) :
Reconnaissance de formes.
Application directe des formules.

Outils : Calcul mental ou manuel

Activité principale : Distance d'un point à une courbe.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle. Le point B a pour coordonnées B(2 ;–1) et M est un point quelconque de $\mathcal{C}$.
Le but de cet exercice est de trouver, s'il existe, le point M de $\mathcal{C}$ pour lequel la distance BM est minimale.

Cette distance minimale, si elle existe, sera appelée distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$.

Partie A : A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser une figure dynamique correspondant à la situation.
Faire une conjecture sur la position de M pour laquelle BM semble minimale. On note M_0 ce point.
Tracer le segment BM_0 et la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0. Qu'observe-t-on ?

Partie B :
Démontrer les conjectures faites au (A).
On pourra s'intéresser à BM² plutôt qu'à BM.
Utilisez la figure réalisée au (A) pour vous assurer de la cohérence des calculs faits.

Compétence(s) calculatoire(s) travaillée(s) :
Calcul de dérivées.
Etude de signes.
Objectif(s) : Mettre en œuvre de manière autonome une étude de fonctions afin de résoudre un problème.
Outils : Géométrie dynamique

Activités en aval :

Remédiation :	Approfondissement :
Reprise de cet exercice - Guide de résolution - Calculs épaulés par un logiciel de calcul formel.	Que se passe-t-il si la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x + 2$? Que se passe-t-il si le point B est le point de coordonnées B(1 ; 0) ?
Remédiation « méthode » : Guide de résolution : Problèmes d'optimisation : Quel est le minimum de… ? 1) Déterminer la fonction dont on cherche le minimum. *Ici,* la fonction donnant BM² en fonction de l'abscisse x de M. 2) Etudier f pour trouver son minimum. a. Calculer la dérivée de f. b. Etudier son signe. c. Conclure.	Remédiation « calcul » : 1) Vérifier que BM² = $(x-2)^2 + (\exp x + 1)^2$ où x est l'abscisse de M. 2) Utiliser xCas pour étudier la fonction $x \mapsto (x-2)^2 + (\exp x + 1)^2$. 3) En déduire la position de M_0. 4) Retrouver les résultats précédents sans utiliser de logiciel.