Etude d'une aire
(exemple d'un travail à partir d'une évaluation)

Activités en amont :	
Activités mentale de début d'heure : 2, 3 calculs de dérivée.	Distance d'un point à une droite.
« Une histoire d'optimisation »	Travail sur la réalisation de fiches méthode.

Compétence(s) calculatoire(s) travaillée(s) :
Reconnaissance de formes.
Application directe des formules.

Outils : Calcul mental ou manuel. Utilisation de la calculatrice comme outil de vérification.

Activité principale : Etude d'une aire...

Partie A : Soit g la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $g(x) = \exp(x) - x\exp(x) + 1$.

1) Déterminer les variations de la fonction g et donner le tableau de variation de g.
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur [0 ; 10] une unique solution. On note α cette solution. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.
4) Démontrer que $\exp(\alpha) + 1 = \alpha\exp(\alpha)$ et que $\exp(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$.

Partie B : On considère maintenant la fonction A, définie et dérivable sur [0 ; 10] par $A(x) = \frac{4x}{\exp(x)+1}$.

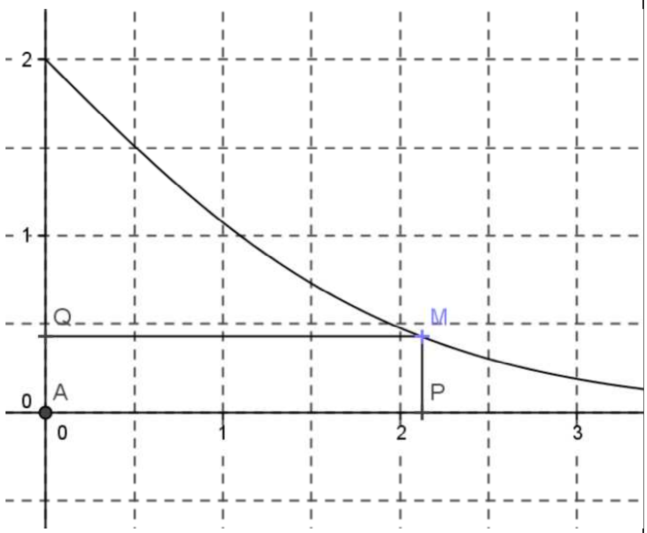
On note A' la dérivée de A.

1) Démontrer que, pour tout réel positif ou nul x, la dérivée $A'(x)$ est le même signe que $g(x)$ (où g est la fonction de la partie A).
2) En déduire les variations de A sur [0 ; 10].

Partie C : on considère la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(x) = \frac{4}{\exp(x)+1}$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O,I,J). La figure est donnée ci-dessous.

Pour tout réel x positif ou nul, on note M le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse x. P est le point de coordonnées (x ; 0) et Q est le point de l'axe (OJ) de même ordonnées que M (voir figure).

1) Quelles sont les coordonnées de M ?
2) Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
3) Dans cette question on considère M_0 d'abscisse α. (T) est la tangente à $(\mathcal{C})$ en M. Compléter la figure ci-contre en plaçant M_0 et (T). Est-ce que (T) est parallèle à la droite (PQ) ?



Compétence(s) calculatoire(s) travaillée(s) :
Calcul de dérivées.
Factorisations *simples*.
Etude de signes.

Objectif(s) :

Outils : Calculatrice (en particulier comme outil de vérification)

Consigne donnée aux élèves : Il s'agit d'un exercice donné lors d'une évaluation.

Activités en aval :

Difficultés constatées :
Beaucoup d'erreurs dès le calcul de la dérivée de g.

Peu d'élèves ont vérifié la cohérence entre leur dérivée et la courbe de g qu'ils auraient pu observer sur leur calculatrice. Peu d'élèves comprennent ce qu'ils ont à faire à la question B)1) (ce point avait pourtant été déjà rencontré et travaillé en classe).	
Remédiation :	Approfondissement :
Reprise de cet exercice avec un travail spécifique sur : - Que faut-il faire ? - Comment utiliser la calculatrice ? Remarque : Travail mené en AP.	
Fiche remédiation calculus.	

Activité en aval – Remédiation
Objectifs : Apprendre l'autonomie des élèves. Outils : Calculatrice. Calcul formel.

<u>Partie A :</u> Soit *g* la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $g(x) = \exp(x) - x\exp(x) + 1$.

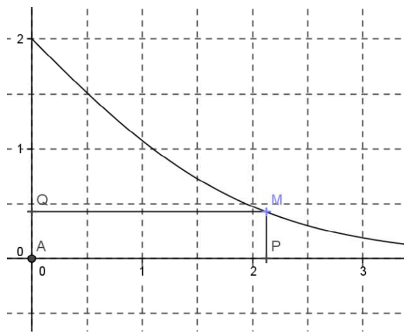
1) Déterminer les variations de la fonction *g* et donner le tableau de variation de *g*.
   Comment faut-il faire ? [FICHE MéTHODE[1]]
   Puis-je contrôler (ou conjecturer) le résultat obtenu ? [A vous de créer une fiche méthode !]
2) Démontrer que l'équation *g*(*x*) = 0 admet sur [0 ; 10] une unique solution. On note α cette solution.
   Que faut-il faire ? [FICHE MéTHODE[2]]
   A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   Que faut-il faire ?
3) Déterminer le signe de *g*(*x*) en fonction des valeurs de *x*.
   Que faut-il faire ?
   Puis-je contrôler le résultat obtenu ? [A vous de créer une fiche méthode !]
4) ~~Démontrer que $\exp(\alpha) + 1 = \alpha\exp(\alpha)$ et que $\exp(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.~~

<u>Partie B :</u> On considère maintenant la fonction A, définie et dérivable sur [0 ; 10] par $A(x) = \frac{4x}{\exp(x)+1}$.

On note A' la dérivée de A.

1) Démontrer que, pour tout réel positif ou nul *x*, la dérivée A'(*x*) est le même signe que *g(x)* (où *g* est la fonction de la partie A).
   Que faut-il faire ?
   A quoi cela va-t-il me servir ?
   Utiliser xCas pour faire les calculs nécessaires.

2) En déduire les variations de A sur [0 ; 10].
   Que faut-il faire ?
   Puis-je contrôler le résultat obtenu ?



<u>Partie C :</u> On considère la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(x) = \frac{4}{\exp(x)+1}$. On note ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O,I,J). La figure est donnée ci-dessous.

Pour tout réel x positif ou nul, on note M le point de ($\mathscr{C}$) d'abscisse x. P est le point de coordonnées (x ; 0) et Q est le point de l'axe (OJ) de même ordonnées que M (voir figure).

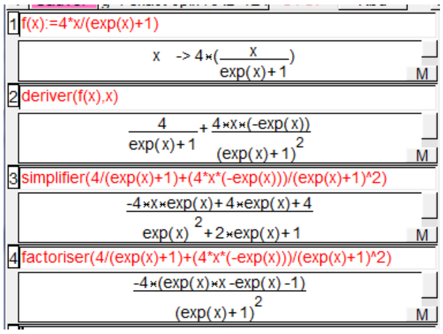
1) Quelles sont les coordonnées de M ?
   C'est une question d'application.
2) Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   Il s'agit d'une question à prise d'initiative !
   Que faut-il faire ?
3) ~~Dans cette question on considère M_0 d'abscisse α.~~
   ~~(T) est la tangente à ($\mathscr{C}$) en M.~~
   ~~Compléter la figure ci-contre en plaçant M_0 et (T).~~
   ~~Est-ce que (T) est parallèle à la droite (PQ) ?~~

Commentaires :

L'idée est d'expliciter chacune des questions et d'insister sur les méthodes à mettre en œuvre.

A1) Le calcul de dérivée est simple ; les élèves doivent réussir à le traiter seuls.

En revanche, ils doivent apprendre à contrôler la cohérence du résultat obtenu à la calculatrice. Cela doit devenir un automatisme.



B1) L'utilisation d'xCas oblige l'élève à se concentrer sur ce qu'il faut faire (sens des calculs) sans qu'il risque « se perdre » dans les détails techniques.

Le constat lors de la mise en œuvre : Le questionnement permet à certains élèves de donner du sens au chaînage des questions –sens qui n'avait pas été perçu auparavant–.

Les élèves réussissent presque tous à traiter les parties A et B de l'exercice lors de cette seconde séance.

Le bilan est donc positif.

Les fiches méthodes :

Elles avaient été élaborées par la classe (en ½ groupe) lors de séances d'AP ; Chacun réalise une carte mentale autour d'une question donnée ; On conclut par une mise en commun et une mise au propre. Les fiches réalisées peuvent être mises à disposition sur l'ENT.

Exemple de fiche réalisée :