Progressivité des apprentissages au collège.

Atelier calcul littéral

Académie de Toulouse. Journées collège 2014.

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.
Plan de l'atelier.

- Constats/débats.
- Présentation des objectifs.
- Le calcul réfléchi de la 6eme à la 3eme : activités mentales pour faciliter l'apprentissage du calcul littéral.
- Une progressivité de la 6^{e} à la 3^{e} à partir d'une liste d'exercices.
- Synthèse avec présentation de traces écrites d'élèves.
- Conclusion

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.
Constats/débat

- Pourquoi malgré nos efforts des élèves ont-ils toujours des difficultés avec le travail sur l'expression littérale?

- Quelles peuvent être les origines de ces difficultés?

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.

Objectifs

- Dégager une démarche progressive réfléchie.

- Les différents statuts de la lettre, de l'égalité, d'une expression littérale.

- Un focus sur les programmes de calculs.

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.
Activités mentales pour faciliter l'apprentissage du calcul littéral.

Le calcul réfléchi de la 6eme à la 3eme :

- Consigne :
  Voici des énoncés d'activités mentales qui peuvent être proposées pour faciliter l'apprentissage du calcul littéral.
  A quel niveau les proposeriez-vous ? Avec quels objectifs ?

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.
Activités mentales pour faciliter l'apprentissage du calcul littéral.

Enoncé	**Niveau**	**Objectifs**
1. Je choisis un nombre, je lui ajoute 4, je trouve 24. Quel nombre ai-je choisi ?		
2. Calculer 12×7		
3. Quel que soit x, a-t-on : $(x+1)(x+5) = 8x + 5$		
4. Est-il vrai que quel que soit x, $1x = x$?		
5. Ecrire plus simplement : $-7\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$		
6. Que montre cette écriture du nombre 52 : $52 = 2 \times 26$?		
7. Trouver x tel que $x + 4 = 24$		
8. Calculer 31^2		
9. Donner une écriture de 34 qui montre que 34 est un nombre pair		
10. Trouver le nombre qu'il faut mettre à la place des pointillés. $\dots \xrightarrow{+4} 24$		
11. Ecrire 72 comme produit de 2 nombres.		
12. Réduire $2x - 3x$		

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.
Activités mentales pour faciliter l'apprentissage du calcul littéral.

13. Que peut-on dire d'un nombre qui s'écrit sous la forme 2n (n étant un entier) ?		
14. Si je double la longueur d'un rectangle, est-ce que je double son aire ?		
15. Calculer 24×37		
16. Question 1 : Calculer $1+\frac{1}{3}$ Question 2 : Calculer $2-\frac{2}{3}$ Question 3 : est-il vrai que $1+\frac{1}{3} = 2-\frac{2}{3}$		
17. Calculer $2^3 \times 2^4$		
18. A quoi est égal $-x^2 + 7x^2$ pour tout nombre x ?		
19. Soit f la fonction qui à tout nombre x associe 2x +6. Calculer l'image de -7 par f.		
20. Ecrire 7x comme une somme de deux termes.		
21. Ecrire 25 comme la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs		
22. Soit n un nombre entier. Ecrire le nombre suivant en fonction de n.		

Calcul littéral : progressivité des apprentissages. Progressivité de la 6e à la 3e .

Consigne :

En vous aidant de cette série d'exercices vous essaierez de créer:

1) Une progressivité sur les niveaux de la 6° à la 3°

2) Une autre progressivité avec 5 exercices sur un niveau que vous choisirez en dégageant les difficultés techniques progressives.

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.
Progressivité de la 6^e à la 3^e .

Programme1

- Choisir un nombre
- Ajouter 2
- Multiplier par 4
- Soustraire 1

Le résultat obtenu est 327, quel est le nombre choisi au départ ?

Programme 2

- Choisir un nombre
- Tripler
- Ajouter 4
- Doubler
- Retirer 4
- Ecrire le résultat

1. Applique le programme au nombre 5.
2. À quel(s) nombre(s) faut-il

Programme 3

- Choisir un nombre
- Doubler
- Ajouter 3
- Multiplier par 3
- Ajouter le nombre de départ
- Ecrire le résultat

1. Applique ce programme au nombre 2.

2.À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer ce programme pour ,8 ?

Programme 4

- Choisir un nombre
- Doubler
- Ajouter 3
- Multiplier par 3
- Ajouter le nombre de départ
- Ecrire le résultat

Écris un programme de calcul plus simple qui donne les mêmes résultats que le précédent pour n'importe quel nombre.

Programme 5

- Choisir un nombre
- Ajouter 2
- Multiplier par 2
- Ajouter le nombre de départ
- Ecrire le résultat

À quel(s) nombre(s) faut-il appliquer ce programme pour trouver 19,75 ? et 33,5 ?

Programme 6

- Choisir un nombre
- Tripler
- Ajouter 4
- Doubler
- Retirer 4
- Ecrire le résultat

1. Appliquer le programme n°1 aux nombres 5, – 5 et 2/3.

A quel(s) nombre(s) faut-il appliquer ce programme pour trouver 809,2 ? pour trouver 14 ?

Programme7

- Choisir un nombre
- Doubler
- Ajouter 5
- Doubler
- Retirer le triple du nombre de départ
- Retirer 10
- Ecrire le résultat

Que penses-tu de ce programme ? Prouve ce que tu avances.

Programme 8

- Choisir un nombre
- Ajouter 1 au carré du nombre de départ
- Multiplier par 6
- Retirer le cube du nombre de départ
- Diviser par 11
- Ecrire le résultat

Appliquer le programme à 1 ; 2 et à 3.

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.
Progressivité de la 6^e à la 3^e .

Programme 9 Avec le tableur

- Choisir un nombre ;
- Le multiplier par 4 ;
- Retrancher 20 au produit obtenu ;
- Multiplier la différence obtenue par le nombre choisi au départ ;
- Ajouter 25 à ce produit.
- Ecrire le résultat.

	A	B	C	D	E	F
1	Nombre de départ	Multiplier par 4	Retrancher 20	Multiplier par le nombre choisi au départ	Ajouter 25	
2	0					
3						

Repérer le coin inférieur droit d'une cellule pour généraliser une formule

Programme10

- Choisir un nombre.
- Ajouter 1.
- Calculer le carré du résultat obtenu
- Soustraire le carré du nombre de départ.
- Soustraire 1.

1. a. Effectuer ce programme lorsque le nombre choisi est -3 et montrer qu'on obtient -6.
   b. Effectuer ce programme lorsque le nombre choisi est $\sqrt{3}$. Montrer que l'on obtient le produit d'un nombre entier par $\sqrt{3}$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Quelle conjecture peut-on faire à propos du résultat fourni par ce programme de calcul ?

Démontrer cette conjecture

Calcul littéral : progressivité des apprentissages.
Progressivité de la 6e à la 3e .

Exercice 13 Dans une classe de troisième a été donné l'exercice suivant :
« Développer et réduire l'expression littérale :
$(2x-5)^2 - 7(3x+5)$ »
Voici les résultats trouvés par trois élèves :

Voici les résultats des calculs demandés dans les 2 questions précédentes :

	x	10	2
Expression du texte	$(2x-5)^2 - 7(3x+5)$	- 20	- 76
Marc	$4x^2 - x + 60$	450	74
Sophie	$4x^2 - 41x - 10$	- 20	- 76
Nadine	$4x^2 - 21x - 210$	- 20	- 236

1) Peut-on déduire des résultats pour x= 10 que certains élèves se sont trompés ? Même question pour x=2.
2) Peut-on affirmer qu'un élève a la bonne réponse ?Peut-on le prouver ?

Exercice 14 : Comparer les trois programmes ci-dessous.

Programme A	Programme B	Programme C
-Choisir un nombre -Doubler -Ajouter 3 -Doubler -Retirer le triple du nombre de départ -Retirer 7 -Ecrire le résultat	-Choisir un nombre -Tripler -Retirer 1 -Doubler -Retirer le double du nombre de départ -Retirer 2 -Ecrire le résultat	-Choisir un nombre -Multiplier par 4 -Retirer 8 -Diviser par 4 -Ajouter 1 -Ecrire le résultat

Programme 11
- Choisis deux nombres quelconques.
- Calcule le carré de chacun.
- Additionne les carrés.
- Puis ajoute deux fois leur produit.

Exercice 12
1) Comparer :

$2^2 + 2$ et $3^2 - 3$
$3^2 + 3$ et $4^2 - 4$
$4^2 + 4$ et $5^2 - 5$
$10^2 + 10$ et $11^2 - 11$

2) Emettre une conjecture puis la démontrer.

Anticiper le calcul littéral.

Dès la 6eme, proposer des situations qui utilisent des propriétés fondamentales et les mettre en valeur :

- La symétrie du signe   = .
- La transitivité de l'égalité.
- La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

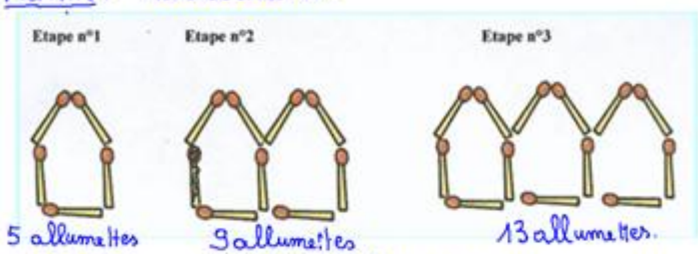
Motiver le calcul littéral

Le calcul littéral pour résoudre des problèmes

Proposer des problèmes que l'on ne peut pas résoudre facilement sans l'utilisation de lettre :

(5°Santiago)

1° Activité : "les allumettes"



On s'intéresse au nombre d'allumettes utilisées à chaque étape.

• le nombre d'allumettes à n'importe quelle étape ?

étape × 4 + 1 encore mieux on remplace "le numéro de l'étape" par une lettre par exemple n

"n" peut varier on l'appelle variable

Le nombre d'allumettes peut s'écrire alors :

$\boxed{n \times 4 + 1}$ qui est une expression littérale.

ou

$5 + 4 \times (n-1)$

ou

$n \times 5 - (n-1)$

Motiver le calcul littéral
Le calcul littéral pour démontrer

- Comparer :

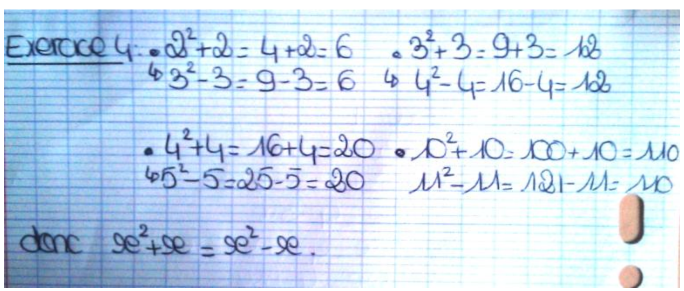
  $2^2 + 2$ et $3^2 - 3$

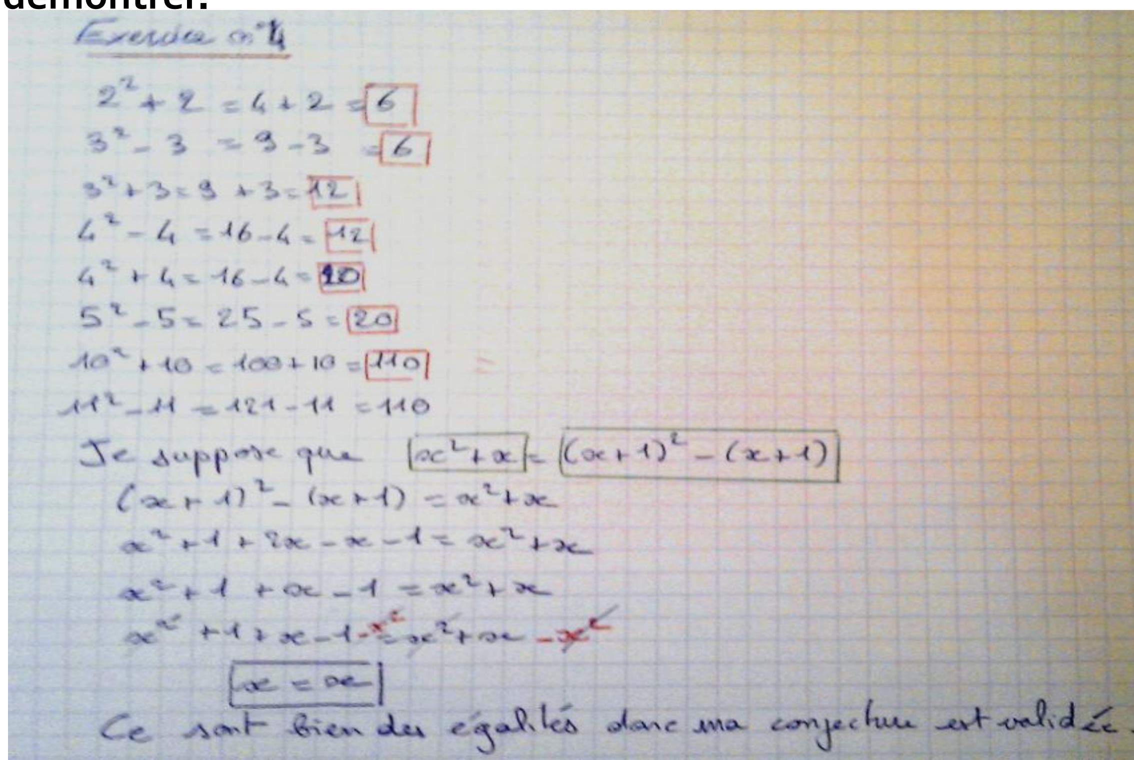
  $3^2 + 3$ et $4^2 - 4$

  $4^2 + 4$ et $5^2 - 5$

  $10^2 + 10$ et $11^2 - 11$

  Emettre une conjecture puis la démontrer.





Motiver le calcul littéral

Les identités remarquables pour factoriser (3emes)

Choisis deux nombres quelconques. Calcule le carré de chacun. Additionne les carrés. Puis ajoute deux fois leur produit.

Synthèse :

Quels que soient les nombres ou expressions mis à la place de $\bigcirc$ ou de $\square$ on a

$$\bigcirc^2 + \square^2 + 2\bigcirc\square = (\bigcirc + \square)^2$$

On dit que le carré d'une somme de deux termes est la somme des carrés de ces deux termes augmentée du double produit de ces deux termes.

Dans les livres on trouve : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Preuve : *à rédiger avec les élèves*

Motiver le calcul littéral

Les identités remarquables pour factoriser (3emes)

a et b sont deux nombres tels que : $a + b = 28$ et $a - b = 6$
Trouvez a et b puis calculez $a^2 - b^2$.
Choisissez ensuite d'autres nombres a et b et calculez $a^2 - b^2$.
Que remarquez-vous ?

- $a = 17$ $\quad a + b = 28$
  $b = 11$ $\quad a - b = 6$

  $a^2 = 17^2 = 289$
  $b^2 = 11^2 = 121$
  $289 - 121 = 168$

- $a = 18,8$ $\quad a + b = 36,9$
  $b = 18,1$ $\quad a - b = 0,7$

  $a^2 = 353,44$
  $b^2 = 327,61$
  $353,44 - 327,61 = 25,83$

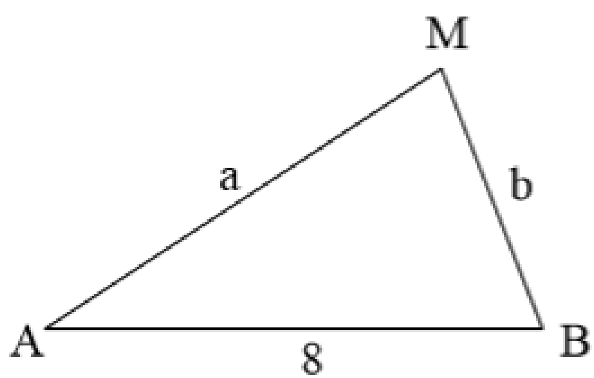
$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$

Comprendre le calcul littéral
Le statut de la lettre.

variable. La rencontre de la lettre comme variable est très précoce, des l'utilisation de formules. La valeur de certaines lettres dépend alors des valeurs attribuées aux autres. La résolution de certains problèmes et l'utilisation d'un tableur sont particulièrement propices à un travail sur cet usage des lettres.

Exemple (Irem de Montpellier) :

- **Construction d'une ellipse**



MA + MB = 11

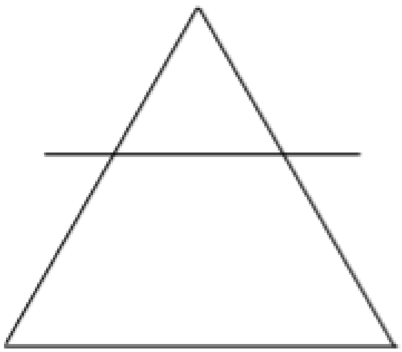
→ Recherche de nombres solutions de :
$a + b = 11$

Comprendre le calcul littéral
Le statut de la lettre.

- **indéterminée**. La lettre ne représente plus des nombres particuliers, mais au contraire des nombres quelconques comme dans les identités telles que $k\,(a + b) = ka + kb$ où l'égalité est universellement vraie.

Comprendre le calcul littéral
Le statut de la lettre.

- **Inconnue**…. il apparait dans des énoncés qui peuvent être rendus faux.
- **paramètre**. La lettre représente une quantité supposée connue par rapport à d'autres lettres.



Où couper un triangle équilatéral par une parallèle à un côté pour que les deux morceaux aient le même périmètre ?

Comprendre le calcul littéral
Le statut de l'égalité

- L'emploi du signe « = » comme symbole exprimant qu'on a affaire a deux expressions d'un même objet mathématique devient prédominant, notamment pour les expressions littérales.

- Le signe « = » est également utilise pour traduire une identité. Il signifie alors que quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs « retournées » par les deux expressions figurant de part et d'autre du signe « = » sont égales.

- Le signe « = » acquiert encore un autre statut dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilise pour écrire des égalités vraies, il apparait dans des énoncés dont on se demande s'ils peuvent être rendus vrais.

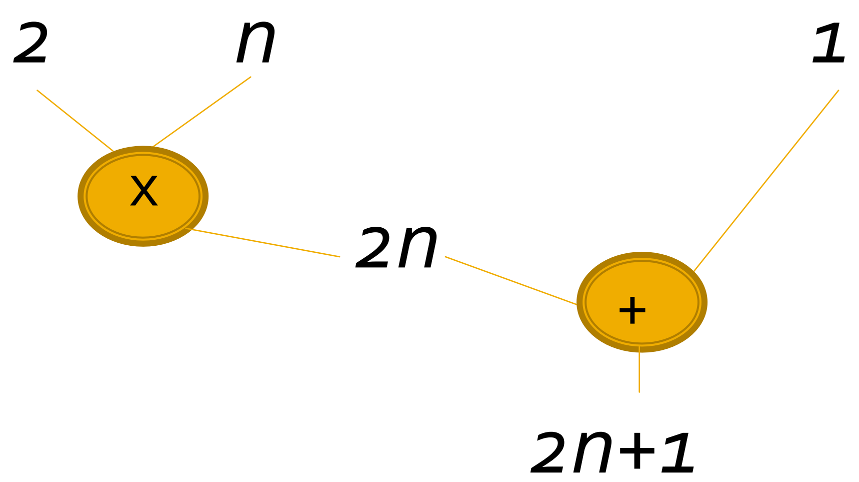
- Enfin, le signe « = » est utilisé comme symbole d'affectation.

(extraits documents d'accompagnement)

Comprendre le calcul littéral
Différents aspects d'une expression littérale

- <u>Aspect procédural.</u>

  n étant un nombre entier, 2n + 1 peut être perçu comme le calcul que l'on fait lorsqu'on choisit un nombre n, qu'on le multiplie par 2, puis qu'on lui ajoute 1.



Comprendre le calcul littéral
Différents aspects d’une expression littérale

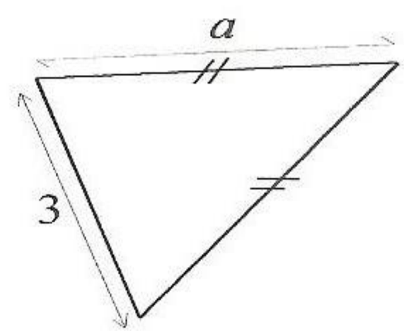
- Aspect structural.
  n étant un nombre entier, $2n + 1$ peut être perçu comme un nombre impair.

Classement d’expressions en somme et produit à partir des priorités des opérations.

Comprendre le calcul littéral

Proposer suffisamment de situations simples pour que l'élève soit capable d'autocontrôler ses résultats à partir de situations.

Ex : est-il vrai que $a \times 2 + 3 = a \times 5$



Travailler la technique

- Régulièrement et par petites touches;
- Faire de la technique au sein des situations rencontrées (danger de perte de sens lorsque le calcul littéral devient un outil autonome);
- Utiliser des propriétés plutôt que des « règles » artificielles
- Ne pas s'interdire de faire « des gammes » une fois que le sens s'est installé.

Conclusion

Quand on a fabriqué des formules

1) Pour n'importe quel nombre x, on a

$(x+5)\times 2 = x\times 2 + 10$ (on développe)
$(x\times 2+3)\times 3 = x\times 6 + 9$

2) Pour n'importe quel nombre c, on a

$(c-2)\times 4 = c\times 4 - 8$ (on développe)
$(c-2)\times 3 = c\times 3 - 6$
$c\times 4 + c\times 4 = c\times 8$ (on factorise c)

Les traces écrites de l'enseignant sont une référence pour les élèves. Justifier les étapes de calcul par une définition ou une propriété.

$*-(3x+1)]$

$G=(2x-3)^2-(3x+1)^2$ • On repère la 3ème identité
$G=[(2x-3)+(3x+1)][(2x-3)^*$ sous forme développé a^2-b^2
$G=(2x-3+3x+1)(2x-3-3x-1)$ avec $a=2x-3$ et $b=3x+$
$G=(5x-2)(-x-4)$ • On écrit la forme factorisée $(a+b)(a-b)$

Conclusion

Préciser le domaine de validité des égalités.

Propriété (admise)

Pour n'importe quels nombres k, a et b,

Développement

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Factorisation

Pour multiplier une somme ou une différence par k, on multiplie chaque terme par k.