ATELIER : Différents types de raisonnement dans nos classes.

Extrait du document ressource raisonnement et démonstration – Juin 2009

La résolution de problèmes, en mathématiques, recouvre plusieurs activités qui, toutes, s'appuient sur le raisonnement de l'élève. Ces activités, parfois successives mais souvent imbriquées, peuvent se décliner en compétences :

• lire, interpréter et organiser l'information ;

• s'engager dans une démarche de recherche et d'investigation ;

• mettre en relation les connaissances acquises, les techniques et les outils adéquats pour produire une preuve

• communiquer par des moyens variés et adaptés – aptes à convaincre – la solution du problème.

I. Introduction : Quels sont les différents types de raisonnement que vous faites vivre dans vos classes (au collège) ?

- Raisonnement déductif
- Raisonnement par disjonction de cas
- Raisonnement par l'absurde
- Raisonnement par contre-exemple
- Raisonnement par présomption et induction.

Extrait du document ressources : Raisonnement et démonstration – Juin 2009

On peut distinguer, dans le domaine scientifique, deux types de raisonnement :

• le raisonnement par induction et présomption : de l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs) on déduit, par présomption, une propriété générale ;

• le raisonnement par déduction : à partir de propriétés reconnues comme vraies, par enchaînement logique, on déduit une propriété.

Dans le domaine des sciences expérimentales, le raisonnement par induction se suffit à lui-même si la méthode employée est suffisamment rigoureuse : la présomption qui résulte d'observations concordantes débouche sur la mise en place d'un protocole expérimental destiné à vérifier les « hypothèses » émises. L'expérience doit être reproductible et la preuve qui en résulte s'apparente à une preuve statistique (par estimateur ou intervalle de confiance).

En mathématiques, le raisonnement inductif ne se conçoit, en général, que comme une première étape conduisant à une conjecture. Il restera ensuite, par un raisonnement déductif, à démontrer la véracité de cette conjecture.

II. Un exemple en classe de troisième : opérations avec les racines carrées.

Questions :

Comment amenez-vous les élèves à découvrir les propriétés ?

Quelles démonstrations faites-vous ?

Quels sont les différents types de raisonnement rencontrés et identifiés dans ces démonstrations ?

Proposition de plusieurs scenarii .

1. Scénario n°1 :

a) Ces égalités sont-elles vraies ou fausses ?

$\sqrt{0+4} = \sqrt{0} + \sqrt{4}$

$\sqrt{25 \times 4} = \sqrt{25} \times \sqrt{4}$

$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}}$.

b) Question aux élèves : et si je change les nombres, les égalités précédentes sont-elles encore vraies ?
Question aux élèves : que peut-on conjecturer ?

2. Scénario n°2 :

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour tous les nombres a et b positifs ?

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

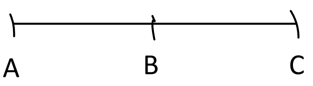
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec b ≠ 0.

3. Scénario n°3 :

Partie 1 :

(NB : *Les élèves ont déjà vu la construction d'un segment de longueur* $\sqrt{2}\ cm$ *et d'un segment de longueur* $\sqrt{3}\ cm$).

1) Le professeur a demandé à ses élèves de construire un segment de $\sqrt{5}$ cm.
Voici la réponse de Pierre : qu'en penses-tu ?



AB = $\sqrt{2}\ cm$ BC = $\sqrt{3}\ cm$ donc AC = $\sqrt{5}$ cm

2) Que peut –on en conclure pour $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ avec a et b positifs ?

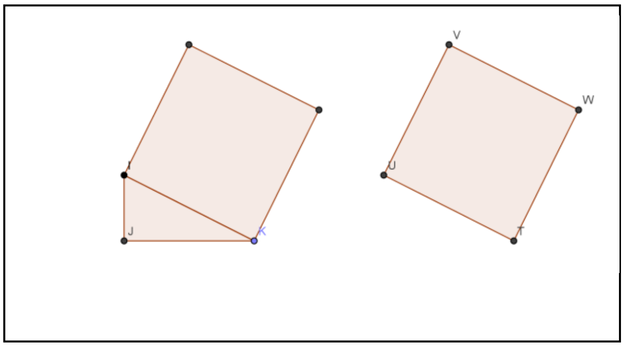
Partie 2 (facultative) :

ABCD est un rectangle de longueur $\sqrt{3}\ cm$ et de largeur $\sqrt{2}\ cm$.

1) Quelle est son aire ?
2) Luc a écrit que l'aire est égale à $\sqrt{6}$ cm². Qu'en penses-tu ?
3) L'égalité $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est-elle vraie avec a et b positifs ?

4. Scénario n°4 :

Partie 1 : partie 1 **scénario n°3**



Partie 2 : (d'après un exercice Sésamath)

Objectif : Comparer $\sqrt{9\times5}$ **et** $\sqrt{9} \times \sqrt{5}$

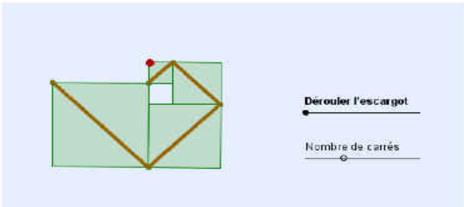
L'unité de longueur est le cm.

1. Tracer un triangle IJK rectangle en J tel que :
   JK = 6 et IJ = 3 .
2. Calculer IK.
3. Calculer l'aire du carré de côté [IK].
4. Considérons un carré TUVW de côté mesurant $3\sqrt{5}$: écrire ce nombre sous la forme $\sqrt{\ldots} \times \sqrt{\ldots}$, puis comparer l'aire du carré TUVW et celle du carré de côté [IK].
5. Comparer alors IK et TU. Conclure.

Partie 3 : Démontrer que : $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, *a* et *b* étant des nombres positifs quelconques.

5. Scénario n°5 : http://pedagogie.ac-amiens.fr/maths/TICE/scenarios/3_racine_escargot/index.php?sc=20

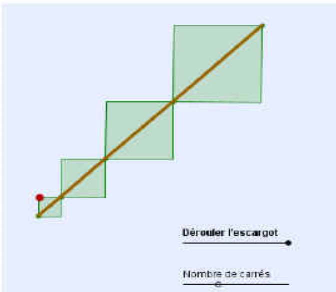
× Projection de la figure « escargot enroulé » (nombre de carrés variable, ici 4. On peut faire apparaître plus de carrés au début pour faire visualiser l'escargot puis en diminuer le nombre)



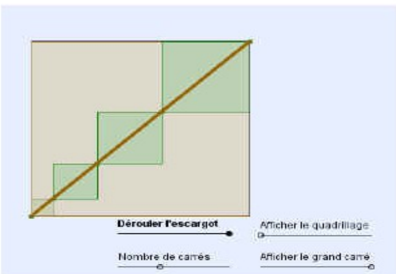
× Consigne : quelle est la longueur de la ligne marron (l'escargot).
→ Aide possible : diminuer le nombre de carrés, éventuellement jusqu'à un pour faire apparaître la décomposition en somme de diagonales de carrés et l'intervention du théorème de Pythagore.
→ apport Tice : figure dynamique et curseur pour régler le nombre de carrés. Possible avec transparents et rétroprojecteur mais beaucoup plus lourd.
La longueur s'exprime comme une somme de nombres en écriture avec radicaux $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}$
→ Erreur attendue et recherchée : simplification en $\sqrt{60}$

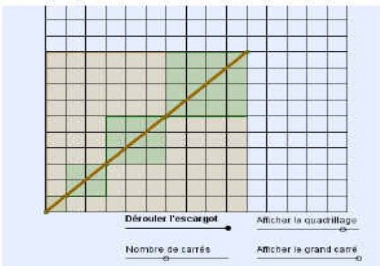
× Dépliage de l'escargot

→ la ligne brisée dont on cherche la longueur apparait comme une ligne droite



Aide possible (animation « escargot1 » insuffisante ; « escargot2 » nécessaire) : on fait apparaître le grand carré. L'affichage du quadrillage aide à calculer les longueurs des côtés des carrés.
→ La longueur cherchée apparaît comme la diagonale d'un grand carré : $\sqrt{200}$.





× Une contradiction apparaît : si $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}=\sqrt{60}$ alors $\sqrt{60}=\sqrt{200}$!

× Simplification de chaque diagonale de petits carrés puis réduction de la somme puis comparaison de $10\sqrt{2}$ et $\sqrt{200}$

Commentaires sur les différents scenarii proposés :

Remarques sur le scénario 1 :

- Le choix des valeurs donnent des réponses vraies à toutes les propositions. Ceci permettra de mettre en évidence qu'on peut avoir un (ou plusieurs) exemple(s) vrai(s) sans que la proposition soit toujours vraie. Ce choix, qui peut paraitre déroutant, amène l'élève à trouver lui-même un contre-exemple et à invalider l'égalité $\sqrt{a+b}$ = $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

- La question c) : « si je change les nombres ? » est une question suffisamment ouverte pour amener les élèves à se poser la question : est-ce toujours vrai ? Il est important de laisser aux élèves le temps de faire de multiples essais. Il est probable que les élèves comprendront vite que cette égalité « n'est pas toujours vraie ».

- Pour l'autre égalité, on peut commencer par interroger les élèves qui ont choisi des carrés parfaits. Puis se posera le problème $\sqrt{21}$ est-il égal à $\sqrt{7}\times\sqrt{3}$? Il est probable que les élèves diront que l'égalité est vraie en s'appuyant sur la calculatrice (*Attention, en mode « math », la calculatrice écrit l'égalité).* L'enseignant devra alors amener l'élève à se poser des questions, en proposant, par exemple, de comparer à l'aide de la calculatrice les deux nombres suivants : $\sqrt{100\ 000}\times\sqrt{100\ 000}$ et $\sqrt{10\ 000\ 000\ 001}$ (de nombreuses calculatrices collège donnent l'égalité). On peut espérer que des élèves pensent que cette égalité n'est pas vraie et on peut alors leur demander de le démontrer : l'élévation au carré peut paraître naturelle. On peut ici proposer un <u>raisonnement par l'absurde</u> : si ces valeurs sont égales alors les carrés sont égaux…impossible.

Il apparaît donc qu'on ne peut pas faire complètement confiance à la calculatrice, d'où la nécessité de démontrer que $\sqrt{7}\times\sqrt{3}$ = $\sqrt{21}$.

On peut aussi faire travailler les élèves sur la possible égalité de $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$ et de $\sqrt{100}$. La calculatrice donne $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$ = 10. Faire émerger que 10 = $\sqrt{100}$ et 100 = 20 × 5.

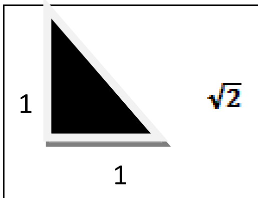
Dans tous les cas, une conjecture ne peut pas être induite à partir de deux ou trois exemples seulement et on veillera à ne pas se limiter à des carrés parfaits.
De plus, il faut faire clairement formuler aux élèves ce qui a été trouvé et en préciser le statut. La démonstration dans le cas général peut être faite ou pas.

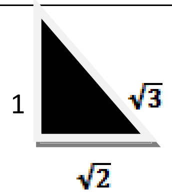
Remarques sur le scénario 2 :

Ce scénario met directement en jeu les expressions littérales.
Ce sont des questions qui laissent aux élèves la possibilité de prendre des initiatives et de s'organiser.
Il faut toutefois s'assurer que ce qui est demandé est compris par tous les élèves (difficulté de travailler sur des expressions littérales).
Un tel énoncé s'appuie sur des compétences travaillées dès la classe de cinquième (faire des essais, tester si une égalité est vraie pour des valeurs …)
Une dérive possible est que l'enseignant puisse être tenté de « mâcher » le travail des élèves (*remplace par ceci ou cela et regarde… etc*.). Ce qui aurait pour effet de court-circuiter leur recherche, et d'appauvrir le questionnement des élèves, ce qui est en contradiction avec les objectifs de départ.
Un travail en groupe peut être envisagé, ce qui peut permettre à tous les élèves de rentrer dans le sujet sans avoir une aide trop directive.

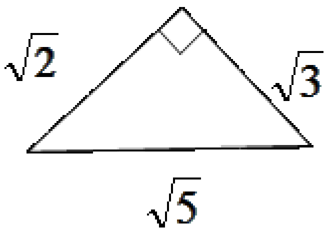
Remarques sur le scénario 3

Au préalable, il a été vu en classe comment construire à l'aide de triangles rectangles, des segments de longueur $\sqrt{2}$ cm et $\sqrt{3}$ cm.





Pour les élèves qui répondraient que la construction proposée est juste, l'enseignant peut leur proposer d'avoir recours à la calculatrice et aux valeurs approchées, et/ou de revenir à la définition et d'élever au carré …
Pour ceux qui répondraient non, l'enseignant peut demander de comparer $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ .Cette comparaison permet de ré-exploiter l'inégalité triangulaire et la réciproque du théorème de Pythagore.



Généralisation : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$?

Pour montrer que l'égalité ci-dessus n'est pas toujours vraie, un raisonnement par contre exemple suffit

Il peut être intéressant de proposer les prolongements suivants :

- Comparer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Dans quels cas y a-t-il égalité ?
- Escargot de Pythagore ;

Le calcul de l'aire du triangle ci-dessus peut amener à la partie 2.

Cette activité peut être proposée en réinvestissement de la propriété plutôt qu'en introduction.

Ces scénarii ont été élaborés dans le but de favoriser le débat et de rendre nécessaire la démonstration.

Dans le chapitre sur les racines carrées, on peut mettre en évidence tous les types de raisonnement possibles au collège :

- Raisonnement par présomption et induction :

L'analyse d'exemples nombreux et variés conduit à conjecturer que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$.

- Raisonnement par l'absurde :

  - Si on veut montrer l'unicité de la racine carrée, on peut utiliser un raisonnement par l'absurde :

Soit a un nombre positif. Soient x et y deux nombres positifs distincts tels que :
$x^2 = a$
$y^2 = a$ donc $x^2 - y^2 = 0$
donc $(x + y)(x - y) = 0$ donc
$x + y = 0$ soit $x = -y$ ce qui est impossible car x et y sont positifs et distincts
ou $x - y = 0$ soit $x = y$: contraire aux hypothèses.
D'où l'unicité.

  - Si on veut montrer que : pour a et b strictement positifs, la racine carrée de la somme n'est pas égale à la somme des racines carrées, on peut utiliser un raisonnement par l'absurde :

Soient a et b deux nombres strictement positifs
Supposons que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. En élevant au carré :
On a $a+b = a + b + 2\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ soit $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = 0$ donc $\sqrt{a} = 0$ ou $\sqrt{b} = 0$.
En élevant au carré, on obtient a = 0 ou b = 0 ce qui est contraire à l'énoncé, d'où….

- Raisonnement par contre exemple : voir scénario ci-dessus.

- Raisonnement déductif :
  Suivant le niveau des élèves, on pourra proposer seulement une démonstration sur un exemple générique ou bien une démonstration générale (avec des écritures littérales).

  - Démonstration sur un exemple générique : $\sqrt{3 \times 5} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$

Extrait du document ressource Raisonnement et démonstration – Juin 2009

*« […] une preuve apportée sur un exemple générique est une forme de raisonnement déductif, car il s'agit d'une démonstration faite sur un exemple mais transférable. Dans ce cadre, il faut faire **identifier aux élèves en quoi l'exemple est générique,** par exemple pour établir des propriétés des opérations, alors même que le professeur choisit de ne pas formaliser avec tous les élèves la généralisation du raisonnement utilisant le recours au calcul littéral. Dans ce cas, la démonstration formalisée, telle qu'elle est définie plus haut, n'est pas faite. »*

Dès la classe de cinquième (cf. programme) *l'égalité* $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ *fait l'objet d'une justification à l'aide d'un exemple générique.*

$\left(\sqrt{3}\times\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2\times\left(\sqrt{5}\right)^2$ = 3 x 5 .

Par définition, le seul nombre positif dont le carré est égal à 3 x 5 est $\sqrt{3\times5}$.

Donc : $\sqrt{3\times5} = \sqrt{3}\times\sqrt{5}$

Evidemment, le choix des valeurs numériques doit mettre en évidence le caractère transférable de ce raisonnement

- Démonstration des égalités (a et b positifs)

  $\sqrt{a\times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec b ≠ 0.

- En exercice : Pour quelles valeurs de a et b (positifs) a-t-on : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$?

- Raisonnement par disjonction des cas :

- Examiner le nombre de solutions de l'équation $x^2 = a$.
- En exercice : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal (cf. Raisonnement et démonstration – Juin 2009)

III- Les différents types de raisonnement mis en œuvre dans différents niveaux du collège :

Un tableau réactualisé, à partir du document élaboré dans l'académie de Bordeaux (2005) : ce tableau propose de façon non exhaustive, les différents types de raisonnement qui peuvent être mis en œuvre dans chaque partie du programme et ce, dans chaque niveau.

Voir le fichier – Tableau réactualisé

IV- Synthèse de l'atelier.

- **Les démonstrations de nos cours sont l'occasion de rencontrer différents types de raisonnement et de les identifier et ce, dans tous les domaines (numérique, algébrique, statistiques, probabilité….)**
- **On ne fait pas toutes les démonstrations ! Mais on en choisit quelques unes qui contribuent à la formation des élèves.**
- **Il est intéressant que l'élève ait rencontré dans le courant de l'année les différents types de raisonnement et ce, à chaque niveau du collège.**
- **Il faut faire ressortir ce type de travail et lui donner une position particulière dans la trace écrite pour permettre aux élèves de l'identifier.**
- **Ce n'est pas parce qu'on a travaillé un type de raisonnement, qu'il devient exigible.**